TRANSFORMADA DE LAPLACE

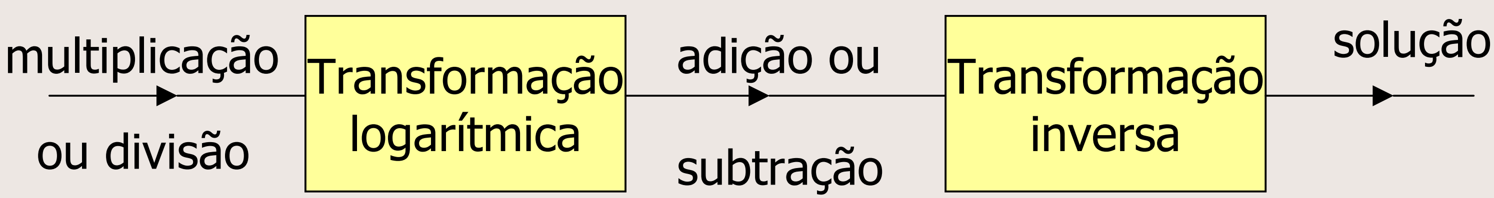
Revisão de alguns:

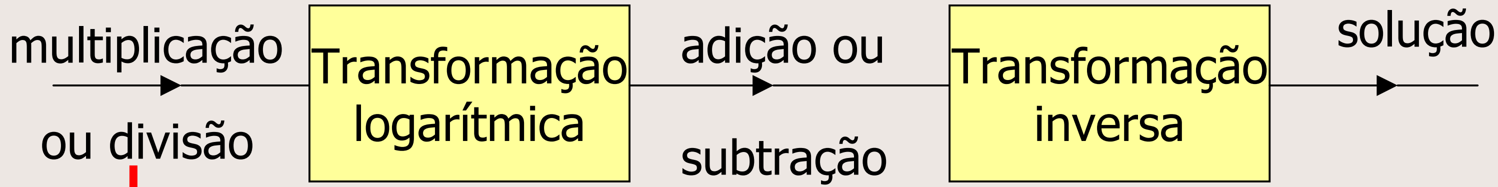
- Conceitos
- Definições
- Propriedades
- Aplicações

Introdução

A *Transformada de Laplace* é um método de transformar equações diferenciais em equações algébricas mais facilmente solucionáveis

Um exemplo simples de transformada matemática é quando o problema de multiplicação é transformado em uma operação mais simples de soma pela *transformada logarítmica*





$$A = B \times C$$

$$\log A = \log(B \times C)$$

$$= \log B + \log C$$

$$D = \log B + \log C$$

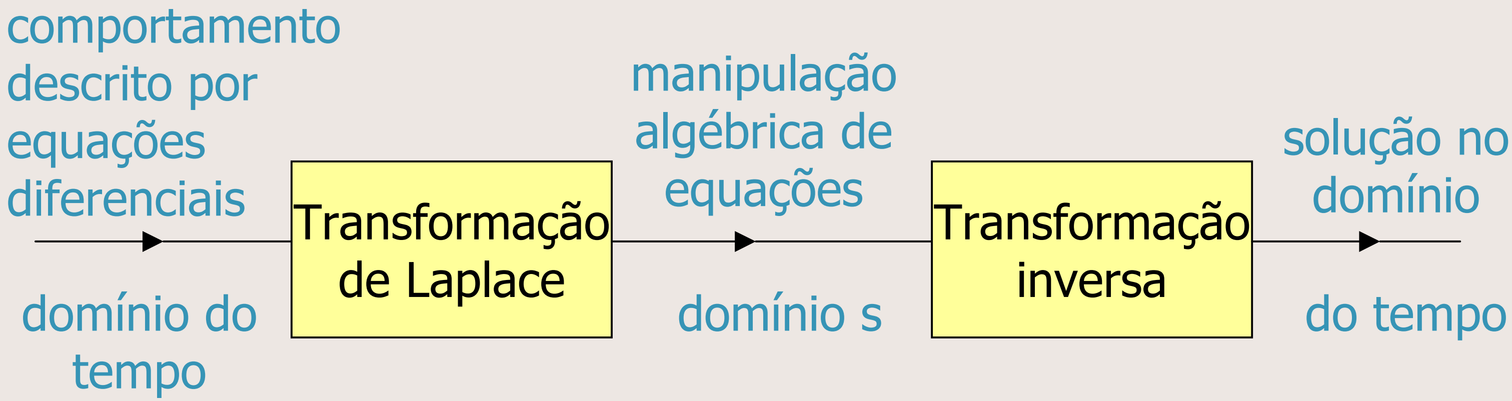
$$\Rightarrow \quad \log A = D$$

$$A = \operatorname{antilog} D$$

Uma *transformada de Laplace* é um tipo de operação matemática semelhante a essa transformação logarítmica

- ✓Equações diferenciais que descrevem como um sistema comporta-se com o tempo são transformadas em relações algébricas simples, não envolvendo o tempo, em que podemos realizar operações algébricas normais.

- ✓Então podemos usar uma transformada inversa para obter a solução que descreve como o sinal varia com o tempo.



TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\int_0^\infty \left(função\ no\ tempo\right)e^{-st}\,dt$$

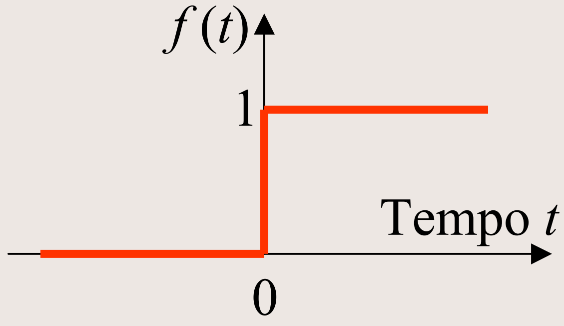
$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Notação da transformada de Laplace

$$v(t) = R.i(t)$$

$$V(s) = R.I(s)$$

Transformada de Laplace da função degrau unitário



$$f(t) = 0 \rightarrow t < 0$$

$$f(t) = 1 \rightarrow t > 0$$

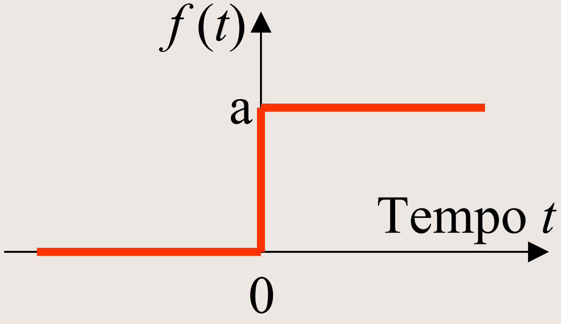
Transformada de Laplace da função degrau unitário para $t > 0$

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt$$

$$F(s) = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{\infty}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

Transformada de Laplace da função degrau de amplitude *a*



$$f(t) = 0 \rightarrow t < 0$$

$$f(t) = a \rightarrow t > 0$$

Transformada de Laplace da função degrau *a* para *t* >0

$$F(s) = \int_0^{\infty} a.e^{-st}dt \quad \Rightarrow \quad F(s) = a\int_0^{\infty} e^{-st}dt$$

$$F(s) = -\frac{a}{s}[e^{-st}]_0^{\infty}$$

$$F(s) = \frac{a}{s}$$

Exemplo: Determinar, a partir da definição, a transformada de Laplace da função e^{at}, onde a é uma constante.

Solução:

$$f(t) = e^{at}$$

Transformada de Laplace $$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$F(s) = -\frac{1}{s-a}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Tabelas de Transformadas de Laplace

Função no tempo	Transformada de Laplace	Descrição da função no tempo
$\delta(t)$	1	Impulso unitário
$f(t)=0 \rightarrow t<0$ $f(t)=1 \rightarrow t>0$	$\dfrac{1}{s}$	Degrau unitário
t	$\dfrac{1}{s^2}$	Rampa unitária
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	Exponencial crescente
$\operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Senóide
$\dfrac{\omega}{\sqrt{1-\varsigma^2}} e^{-\varsigma\omega t} \operatorname{sen}\left((\omega\sqrt{1-\varsigma^2})t\right)$	$\dfrac{\omega^2}{s^2+2\varsigma\omega s+\omega^2}$	

Regras básicas para Transformadas de Laplace

1. A soma de duas funções torna-se a soma de suas duas transformadas de Laplace

$$f_1(t)+f_2(t) \quad \text{torna-se} \quad F_1(s)+F_2(s)$$

2. A subtração de duas funções torna-se a subtração de suas duas transformadas de Laplace

$$f_1(t)-f_2(t) \quad \text{torna-se} \quad F_1(s)-F_2(s)$$

3. A multiplicação de uma função por uma constante torna-se a multiplicação da transformada de Laplace da função pela mesma constante

$$a.f(t) \quad \text{torna-se} \quad a.F(s)$$

Regras básicas para Transformadas de Laplace

4. Uma função com atraso de tempo T_s, isto é , $f(t\text{-}T)$, torna-se $e^{-Ts} F(s)$ para valores de T maiores ou iguais a zero

$$f(t-T) \quad \text{torna-se} \quad e^{-Ts} F(s)$$

5. A derivada primeira de uma função torna-se s vezes a transformada de Laplace da função menos o valor de $f(t)$ em t=0

$$\frac{d}{dt} f(t) \quad \text{torna-se} \quad s\,F(s) - f(0)$$

onde $f(0)$ é o valor da função em $t = 0$

Regras básicas para Transformadas de Laplace

6. A derivada segunda de uma função torna-se s^2 vezes a transformada de Laplace da função menos s vezes o valor da função em t=0 menos o valor da derivada primeira de $f(t)$ em t=0

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) \quad \text{torna}-\text{se} \quad s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

Onde:

$s\,f(0)$ é s multiplicado pelo valor da função em $t = 0$ e

$\frac{df(0)}{dt}$ é a derivada primeira da função em $t = 0$

Regras básicas para Transformadas de Laplace

7. A n-ésima derivada de uma função torna-se s^n vezes a transformada de Laplace da função menos os termos envolvendo $f(t)$ e suas derivadas em t=0

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad \text{torna-se} \quad s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$$

ou

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \ldots - s \frac{d^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$$

Regras básicas para Transformadas de Laplace

8. A primeira integral de uma função, entre o instante 0 e o instante *t* torna-se (1/*s*) vezes a transformada de Laplace da função

$$\int_0^t f(t)\,dt \quad \text{torna-se} \quad \frac{1}{s}F(s)$$

Exemplo: Determinar, utilizando as tabelas, a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) t^2

A tabela dá a transformada de Laplace de $\frac{1}{2}t^2$ como $1/s^3$

Assim, para obter a transformada de Laplace de *t*, precisamos multiplicar a função na tabela por 2. Como é uma constante, a transformada de Laplace de t^2 será:

$$F(s) = \frac{2}{s^3}$$

b) $t^2 e^{-at}$

Utilizando a tabela, a transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{2}{(s+a)^3}$$

Note que a transformada de Laplace de duas funções multiplicadas não é a multiplicação das duas transformadas de Laplace separadas.

c) $t^2\left(1+e^{-at}\right)$

A transformada de Laplace da soma de duas funções é a soma de suas funções transformadas separadas:

$$f(t)=t^2+t^2e^{-at}$$

$$F(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{(s+a)^3}$$

Exemplo: Determinar, utilizando as tabelas, a transformada inversa de:

a) $\dfrac{2}{s}$

A tabela inclui uma transformada de Laplace de $1/s$ e assim, se esse termo é multiplicado por uma constante 2, a transformação inversa será a função que dá a transformada de Laplace de $1/s$ multiplicada pela mesma constante.

A transformação inversa será 2.

b) $$\frac{3}{2s+1}$$

Essa transformada pode ser rearranjada para dar:

$$\frac{(3/2)}{s+(1/2)}$$

A tabela contém a transformada $\frac{1}{s+a}$, cuja inversa é e^{-at}

Assim a transformação inversa é somente $\frac{1}{s+a}$ multiplicada pela constante (3/2), sendo a = (1/2), isto é:

$$f(t) = \frac{3}{2} e^{\frac{-t}{2}}$$

c) $$\frac{2}{s-5}$$

Essa transformada pode ser rearranjada para dar:

$$\frac{2}{s+(-5)}$$

A tabela contém a transformada $\frac{1}{s+a}$, cuja inversa é e^{-at}

Assim a transformação inversa é somente $\frac{1}{s+a}$ multiplicada

pela constante 2, sendo a =–5, isto é:

$$f(t) = 2e^{5t}$$

Utilizando as Transformadas de Laplace para resolver equações diferenciais

1. Transformar cada termo na equação diferencial em suas transformadas de Laplace, isto é, mudar a função do tempo para uma função em *s*.
2. Pesquisar todas as manipulações- por exemplo, considerar o que acontece quando uma entrada degrau é aplicada ao sistema.
3. Converter a função de Laplace resultante em uma equação como função do tempo, isto é, a transformada inversa de Laplace.

Para usar as tabelas de transformadas de Laplace e assim determinar a conversão, é freqüentemente necessário decompor em frações parciais para obter as formas padrão dadas nas tabelas

Exemplo: Usar a transformada de Laplace para resolver a seguinte equação diferencial:

$$3\frac{dx}{dt} + 2x = 4 \qquad \text{com } x = 0 \text{ em } t = 0$$

Solução:

$$3\left[sX(s) - x(0)\right] + 2X(s) = \frac{4}{s} \qquad \text{se } x(0) = 0$$

$$3\left[sX(s) - 0\right] + 2X(s) = \frac{4}{s}$$

$$3s^2 X(s) + 2sX(s) = 4$$

$$X(s) = \frac{4}{3s^2 + 2s} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{2(2/3)}{s\left[s + (2/3)\right]}$$

$$X(s) = \frac{2(2/3)}{s[s+(2/3)]}$$

Agora é necessário encontrar as funções que dariam as transformadas de Laplace desta forma, de modo a obter a transformação inversa de x.

Se a transformada inversa de $\frac{a}{s(s+a)}$ é $(1-e^{-at})$, então:

$$a = \frac{2}{3}$$

e

$$x(t) = 2\left(1 - e^{\frac{-2t}{3}}\right)$$

Exemplo: Para uma tensão de entrada degrau de amplitude V em $t = 0$ em um circuito RC, a equação diferencial para a diferença de potencial no capacitor v_c é dada por:

$$V = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C \qquad \text{com } v_c = 0 \text{ em } t = 0$$

Solução:

$$\frac{V}{s} = RC\, sV_C(s) + V_C(s)$$

$$V_C(s) = \frac{V}{(RCs+1)s} \Rightarrow V_C(s) = \frac{V(1/RC)}{s[s+(1/RC)]}$$

A função $\left(1-e^{-at}\right)$ dá a transformada de Laplace $\dfrac{a}{s(s+a)}$

sendo: $a = \dfrac{1}{RC}$

$$v_C(t) = V\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Frações Parciais

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$$

Existem três tipos básicos de frações parciais:

1. Fatores lineares no denominador

Expressão $$\frac{f(s)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

Fração parcial $$\frac{A}{(s+a)}+\frac{B}{(s+b)}+\frac{C}{(s+c)}$$

Frações Parciais

2. Fatores lineares repetidos no denominador

Expressão
$$\frac{f(s)}{(s+a)^n}$$

Fração parcial
$$\frac{A}{(s+a)}+\frac{B}{(s+a)^2}+\frac{C}{(s+a)^3}+\ldots+\frac{N}{(s+a)^n}$$

3. Fatores quadráticos no denominador, quando o fator tem raízes complexas conjugadas

Expressão
$$\frac{f(s)}{as^2+bs+c}$$

Fração parcial
$$\frac{As+B}{as^2+bs+c}$$

Frações Parciais

Fatores quadráticos no denominador, quando o fator tem raízes complexas conjugadas e existe também um fator linear no denominador

Expressão

$$\frac{f(s)}{\left(as^2+bs+c\right)\left(s+d\right)}$$

Fração parcial

$$\frac{As+B}{as^2+bs+c}+\frac{C}{s+d}$$

Exemplo: $\dfrac{3x+4}{x^2+3x+2}$

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$3x+4=(A+B)x+2A+B$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

Teoremas do valor inicial e do valor final

Teorema do valor inicial

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

Teorema do valor final

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

Os teoremas do valor inicial e do valor final são muito úteis quando é necessário determinar a partir da transformada de Laplace o comportamento da função $f(t)$ em 0 e ∞