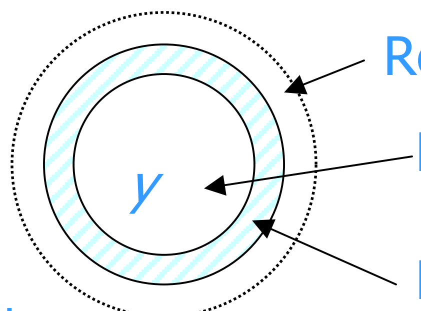
MODELOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

- Função de transferência
- Resposta transiente

Função de Transferência

Desenvolveremos a *função de transferência* de um *sistema de primeira ordem* considerando o comportamento não estacionário de um termômetro de mercúrio com bulbo de vidro



Seção transversal do termômetro

✓Considere que o termômetro está localizado em uma corrente de fluido cuja temperatura x varia com o tempo.

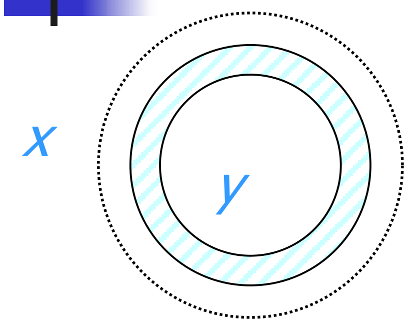
✓O problema consiste em calcular a *resposta* ou variação com tempo da leitura y do termômetro para uma variação particular de x.

Adotaremos a análise concentrada com as seguintes hipóteses:

1. Toda a resistência à transferência de calor se concentra na película que envolve o bulbo *(isto é, a resistência oferecida pelo vidro e pelo mercúrio é desprezível).*
2. Toda a capacidade térmica se concentra no mercúrio.
3. Em qualquer instante o mercúrio apresenta uma temperatura uniforme.
4. A parede de vidro que contém o mercúrio não se expande nem se contrai durante a resposta transiente.
5. O termômetro se encontra inicialmente em estado estacionário.
6. No tempo zero o termômetro será submetido a uma mudança na temperatura do meio $x(t)$

Aplicando a equação de conservação da energia:

Taxa de entrada de energia	−	Taxa de saída de energia	=	Taxa de acumulação de energia



$$hA\left(x-y\right)-0=mC\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Antes de resolver esta equação por <u>transformada de Laplace</u>, introduziremos **VARIÁVEIS DESVIO**

Em regime permanente:

$$hA\left(x_s-y_s\right)=0 \qquad t<0 \qquad (2)$$

O subscrito *s* indica que a variável está em seu valor de regime permanente

$$h\,A\left(x_s - y_s\right) = 0 \qquad t < 0$$

A equação (2) estabelece que $x_s = y_s$, isto é, a leitura do termômetro é igual à temperatura verdadeira do banho

Subtraindo a equação 2 da equação 1

$$h\,A\left[\left(x - x_s\right) - \left(y - y_s\right)\right] = m\,C\,\frac{d\left(y - y_s\right)}{dt} \qquad (3)$$

Se definirmos as VARIÁVEIS DESVIO como sendo as diferenças entre as variáveis e seus valores estacionários

$$X = x - x_s$$

$$Y = y - y_s$$

$$h\,A\left(X - Y\right) = m\,C\,\frac{dY}{dt} \qquad (4)$$

$$h\,A\left(X - Y\right) = m\,C\,\frac{dY}{dt} \qquad (4)$$

Se fizermos: $\dfrac{mC}{hA} = \tau$

$$X - Y = \tau\,\frac{dY}{dt} \qquad (5)$$

Transformada de Laplace

$$X(s) - Y(s) = \tau\, s\, Y(s) \qquad (6)$$

Rearranjando

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau\, s + 1} \qquad (7)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad (7)$$

O parâmetro τ é chamado *constante de tempo* do sistema e tem dimensão de tempo

O membro direito da eq. 7 é chamado de *função de transferência* do sistema

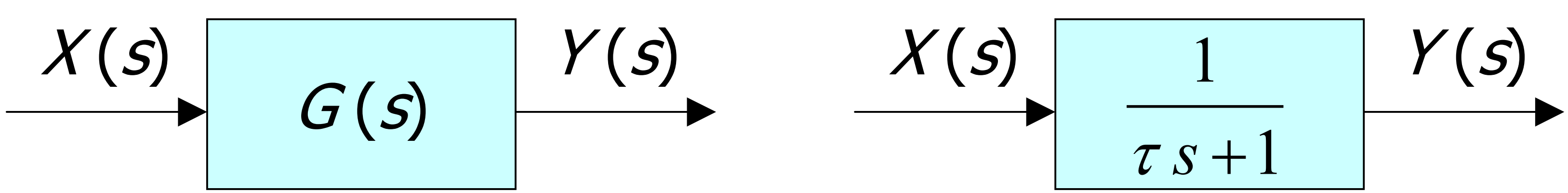
$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$\textit{Função de transferência} = \frac{\textit{transformada de Laplace do desvio da SAÍDA}}{\textit{transformada de Laplace do desvio da ENTRADA}}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

1. Revendo as etapas que conduziram à eq. 7, pode-se observar que a introdução das variáveis desvio antes da aplicação da transformada de Laplace à equação diferencial dá origem a uma função de transferência independente das condições iniciais, pois os valores iniciais de X e Y são nulos.
2. Em engenharia de controle, interessa-nos primordialmente os desvios das variáveis do sistema de seus valores estacionários.
3. O uso das variáveis desvio é, deste modo, natural e, ao mesmo tempo, conveniente.

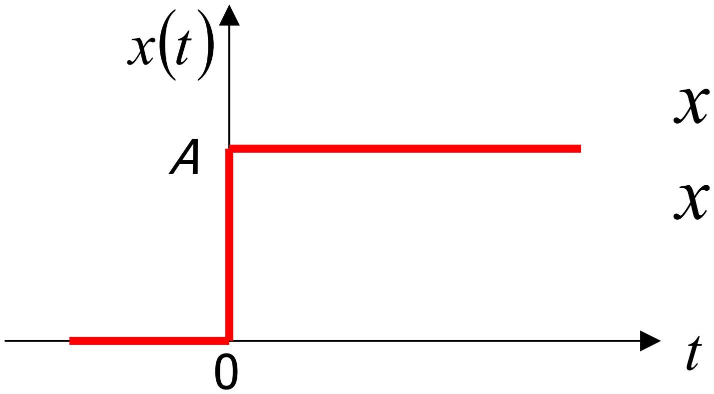
A relação funcional contida em uma função de transferência é geralmente representada em diagrama de blocos



Resposta Transiente

Função perturbação: Função degrau

$$x(t) = A\,u(t)$$



$$x = 0 \rightarrow t < 0$$

$$x = A \rightarrow t \geq 0$$

$$X(s) = \frac{A}{s} \qquad (8)$$

Combinando as eqs. 7 e 8

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau\, s + 1} \qquad (7)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{\tau\, s + 1}\,\frac{A}{s}} \qquad \boxed{Y(s) = \frac{A}{s\left(\tau\, s + 1\right)}}$$

(9)

$$Y(s) = \frac{A}{s(\tau s + 1)} \qquad (9)$$

Expandindo a eq. 9 em frações parciais

$$Y(s) = \frac{A/\tau}{(s)\left(s + 1/\tau\right)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s + 1/\tau}$$

$$A/\tau = C_1 s + C_1\, 1/\tau + C_2 s \qquad 0\, s + A/\tau = (C_1 + C_2)s + C_1\, 1/\tau$$

$$\begin{matrix} s \rightarrow \\ 1 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1/\tau\, C_1 = A/\tau \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = A \\ C_2 = -A \end{cases}$$

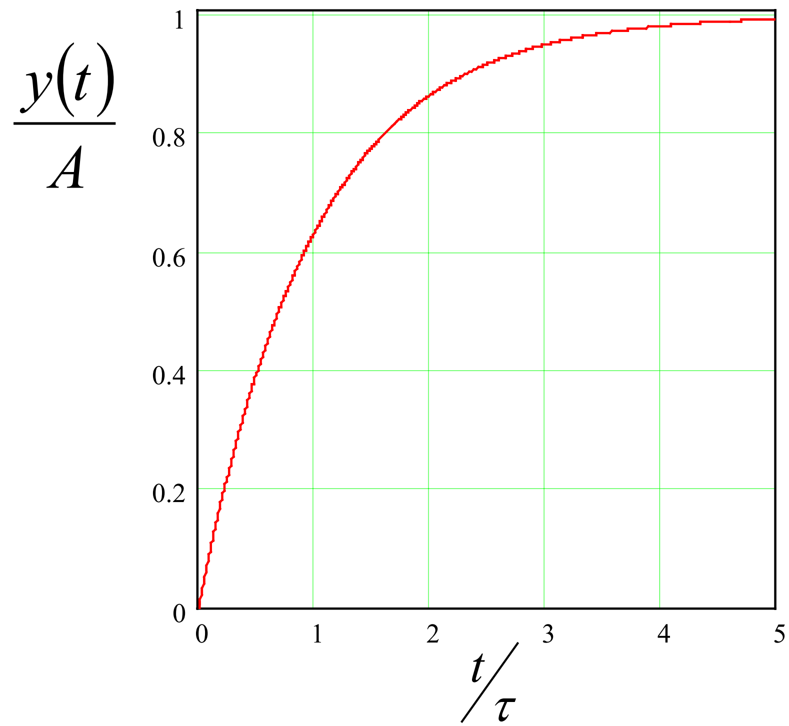
$$Y(s)=\frac{A}{s}-\frac{A}{s+{}^{1}\!/_{\tau}}$$

Transformada inversa de Laplace

$$\frac{1}{s}\Leftrightarrow 1 \qquad \frac{1}{s+a}\Leftrightarrow e^{-at}$$

$$y(t)=A-Ae^{\frac{-t}{\tau}}$$

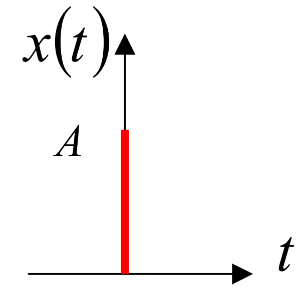
$$y(t)=A\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$



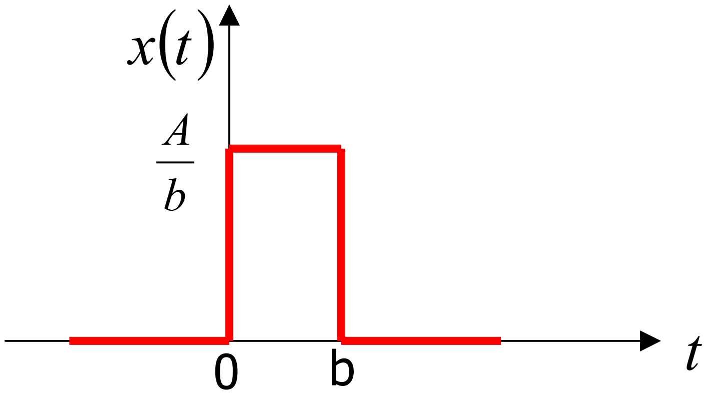
Exercício

Um termômetro que apresenta uma constante de tempo de 0,1 min encontra-se a uma temperatura estacionária de 30 °C. No tempo $t = 0$, o termômetro é colocado em um banho mantido a 40 °C. Determinar o tempo necessário para que a temperatura lida pelo termômetro seja 38 °C.

Resposta Transiente



Função perturbação: Função impulso $x(t) = A\,\delta(t)$



$$x = 0 \rightarrow t < 0$$

$$x = \frac{A}{b} \rightarrow 0 \le t \le b$$

$$x = 0 \rightarrow t > b$$

$$\lim_{b \to 0} x(t) = A\,\delta(t)$$

Combinando as eqs. 7 e 10

$$X(s) = A \qquad (10)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{A}{\tau s + 1}} \qquad (11)$$

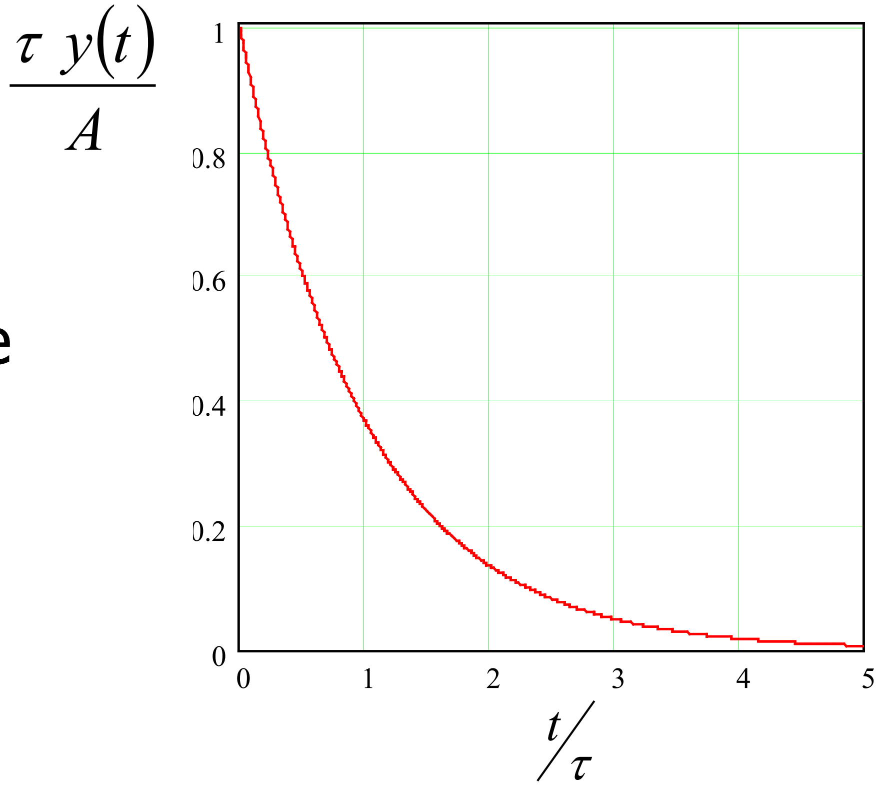
$$Y(s) = \frac{A}{\tau s + 1} \qquad (11)$$

A equação 11 pode ser expressa como:

$$Y(s) = \frac{A/\tau}{s + 1/\tau}$$

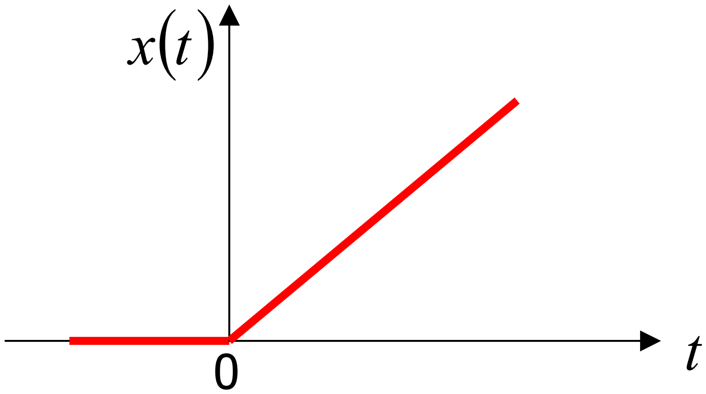
Transformada inversa de Laplace

$$y(t) = \frac{A}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$$



Resposta Transiente

Função perturbação: Função rampa $x(t) = A\,t$



$$x = 0 \rightarrow t < 0$$

$$x = A\,t \rightarrow t \geq 0$$

$$X(s) = \frac{A}{s^2} \qquad (12)$$

Combinando as eqs. 7 e 12

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau\,s+1} \qquad \boxed{Y(s) = \frac{1}{\tau\,s+1}\frac{A}{s^2}} \qquad \boxed{Y(s) = \frac{A}{s^2(\tau\,s+1)}}$$

(13)

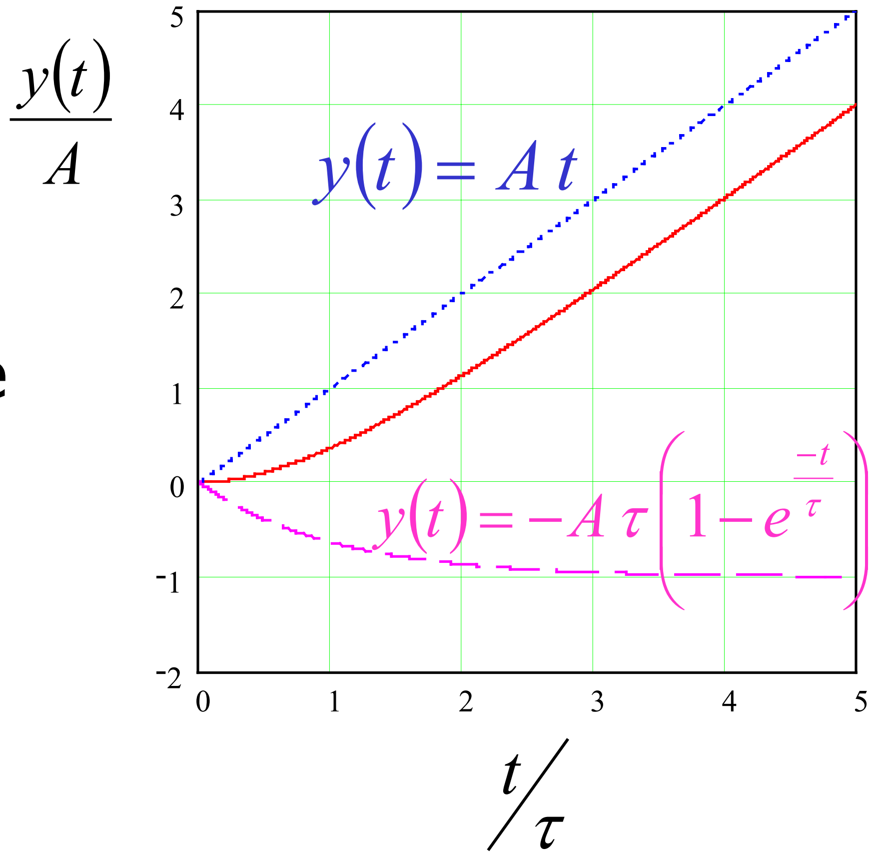
$$Y(s) = \frac{A}{s^2(\tau s + 1)} \qquad (13)$$

A equação 13 pode ser expressa como:

$$Y(s) = A \frac{1/\tau}{s^2\left(s + 1/\tau\right)}$$

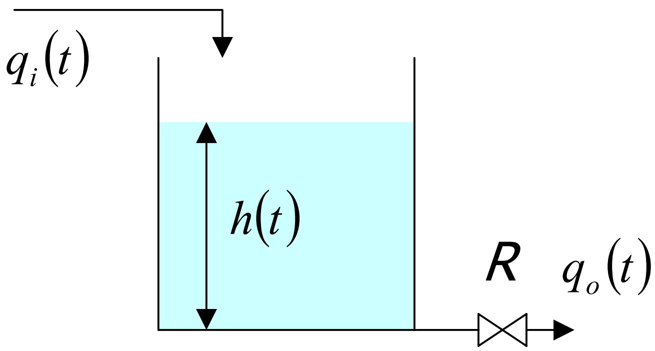
Transformada inversa de Laplace

$$y(t) = A\left[t - \tau\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right]$$



Exemplos físicos de sistemas de primeira ordem

Nível de líquido



Equação de conservação da massa

$$\sum \dot{m}_i - \sum \dot{m}_e = \frac{d\,m}{dt}$$

$$\rho\, q_i(t) - \rho\, q_o(t) = \frac{d(\rho V)}{dt}$$

$$\rho = constante$$

$$V = Ah$$

$$q_i(t) - q_o(t) = A\frac{d\,h}{dt} \qquad [1]$$

A vazão volumétrica q_o se relaciona com a resistência R e altura h pela relação linear:

$$q_o = \frac{h}{R} \qquad [2]$$

Combinando as eqs. 1 e 2, e fazendo $q_i(t) = q$

$$q - \frac{h}{R} = A\frac{d\,h}{dt} \qquad [3]$$

Em regime permanente a equação 3 fica

$$q_s - \frac{h_s}{R} = 0 \qquad [4]$$

Subtraindo a eq. 4 da eq. 3

$$(q - q_s) = \frac{(h - h_s)}{R} + A\frac{d(h - h_s)}{dt} \qquad [5]$$

$$\left(q - q_s\right) = \frac{\left(h - h_s\right)}{R} + A\frac{d\left(h - h_s\right)}{dt} \qquad [5]$$

Definindo as *variáveis desvio*

$$Q = q - q_s$$

$$H = h - h_s \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{H}{R} + A\frac{dH}{dt} \qquad [6]$$

Transformada de Laplace

$$Q(s) = \frac{H(s)}{R} + A\,sH(s) \qquad [7]$$

Com o uso de variáveis desvio, $H(0)=0$, e a transformada $\frac{dH}{dt}$ é simplesmente $s\,H(s)$

A equação 7 pode ser reescrita como:

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \qquad \text{onde} \qquad \tau = AR \qquad [8]$$

Para uma variação na forma de degrau unitário na vazão de entrada

$$Q(t) = \begin{cases} 0 \rightarrow t < 0 \\ 1 \rightarrow t > 0 \end{cases} \quad \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Transformada}} \quad Q(s) = \frac{1}{s}$$

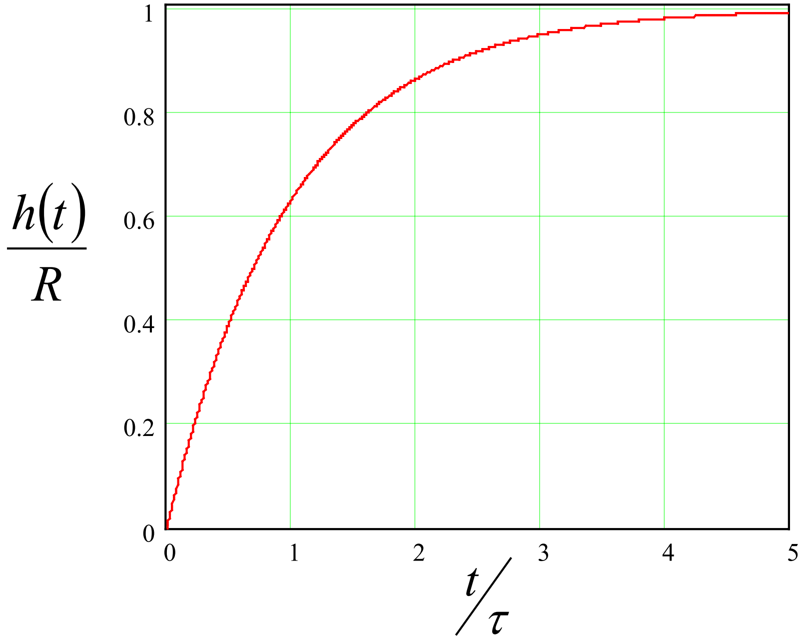
Aplicando na equação 8

$$H(s) = \frac{R}{\tau s + 1}\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad H(s) = R\frac{1/\tau}{s\left(s + 1/\tau\right)}$$

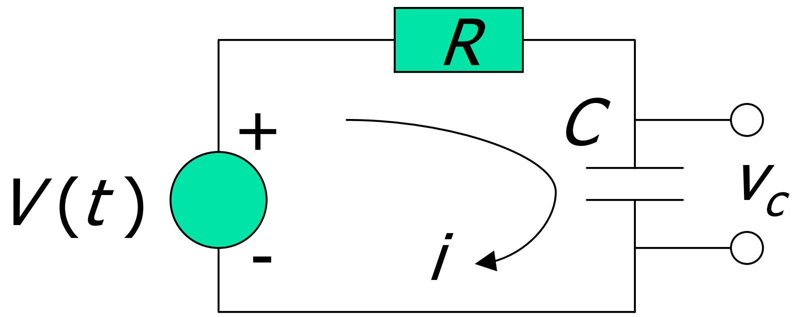
Aplicando a transformada inversa

$$\frac{a}{s(s+a)} \Leftrightarrow 1 - e^{-at}$$

$$h(t) = R\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$



Circuito RC



Conservação da carga elétrica

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \qquad (1)$$

$$v_R(t) = R\, i(t) \qquad i(t) = C\frac{d\, v_C(t)}{dt} \qquad v_R(t) = RC\frac{d\, v_C(t)}{dt} \qquad (2)$$

$$RC\frac{d\, v_C}{dt} + v_C = v \qquad (3)$$

$$RC\frac{d\,v_C}{dt}+v_C=v \qquad (3)$$

Em regime permanente a equação 3 fica:

$$0+v_{C_s}=v_s \qquad (4)$$

Subtraindo a equação 4 da 3

$$RC\frac{d\left(v_C-v_{C\,s}\right)}{dt}+\left(v_C-v_{C\,s}\right)=\left(v-v_s\right) \qquad (5)$$

Variáveis desvio: $V=v-v_s \qquad V_C=v_C-v_{C_S}$

$$RC\frac{d\,V_C}{dt}+V_C=V \qquad (6)$$

$$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = V \qquad (6)$$

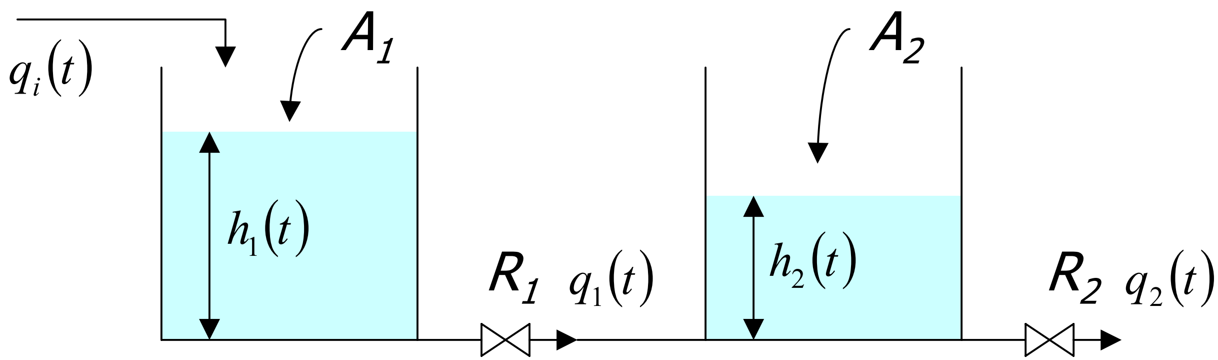
Transformada de Laplace

$$RCsV_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

Com: $\tau = RC$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Nível de líquido



Equação de Conservação da Massa

$$q_i - q_1 = \frac{dV_1}{dt}$$

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad V_1 = A_1 h_1$$

$$q_1 - q_2 = \frac{dV_2}{dt}$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \qquad V_2 = A_2 h_2$$

Para o reservatório 1:

$$q_i - \frac{h_1 - h_2}{R_1} = A_1 \frac{d\,h_1}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad R_1 A_1 \frac{d\,h_1}{dt} + h_1 - h_2 = R_1 q_i \quad ♣$$

Em regime permanente

$$0 + h_{1_s} - h_{2_s} = R_1 q_{i_s} \quad ♦$$

Subtraindo: ♣ - ♦

$$R_1 A_1 \frac{d\left(h_1 - h_{1_s}\right)}{dt} + \left(h_1 - h_{1_s}\right) - \left(h_2 - h_{2_s}\right) = R_1\left(q_i - q_{i_s}\right)$$

Introduzindo as variáveis desvio:

$$H_1 = h_1 - h_{1_s} \qquad H_2 = h_2 - h_{2_s} \qquad Q_i = q_i - q_{i_s} \qquad \text{e} \qquad \tau_1 = R_1 A_1$$

$$\tau_1 \frac{d\,H_1}{dt} + H_1 - H_2 = R_1 Q_i \qquad \text{(a)}$$

Para o reservatório 2:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2} = A_2 \frac{d\,h_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad R_2 A_2 \frac{d\,h_2}{dt} + h_2\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} h_1 = 0 \; \spadesuit$$

Em regime permanente

$$0 + h_{2_s}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} h_{1_s} = 0 \; \heartsuit$$

Subtraindo: $\spadesuit$ - $\heartsuit$

$$R_2 A_2 \frac{d\left(h_2 - h_{2_s}\right)}{dt} + \left(h_2 - h_{2_s}\right)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1}\left(h_1 - h_{1_s}\right) = 0$$

Introduzindo as variáveis desvio:

$$H_1 = h_1 - h_{1_s} \qquad H_2 = h_2 - h_{2_s}$$

e

$$\tau_2 = R_2 A_2$$

$$\tau_2 \frac{d\,H_2}{dt} + H_2\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} H_1 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\tau_1 \frac{dH_1}{dt} + H_1 - H_2 = R_1 Q_i$$

$$\tau_2 \frac{dH_2}{dt} + H_2\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} H_1 = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace

$$\tau_1 s H_1(s) + H_1(s) - H_2(s) = R_1 Q_i(s)$$

$$\tau_2 s H_2(s) + H_2(s)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{R_2}{R_1} H_1(s) = 0$$

$$H_1(s) = \frac{H_2(s) + R_1 Q_i(s)}{\tau_1 s + 1}$$

$$H_1(s) = \frac{H_2(s)}{\tau_1 s + 1} + \frac{R_1 Q_i(s)}{\tau_1 s + 1}$$

$$H_2(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1} H_1(s)}{\tau_2 s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Resolvendo para H/Q :

$$\frac{H_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_1\tau_2 s + R_1 + R_2}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1R_2)s + 1}$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_1}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1R_2)s + 1}$$

Exemplo de solução com valores numéricos:

$$R_1 = R_2 = 1{,}25\,\frac{m}{\left(m^3/min\right)}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 1\,min$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 0{,}24\,m^3 & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$A_1 = A_2 = 0{,}8\,m^2$$

$$Q_i(s) = \frac{0{,}24}{s}$$

$$\frac{H_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{1{,}25\, s + 2{,}5}{s^2 + 3\, s + 1} \qquad H_1(s) = \frac{1{,}25\, s + 2{,}5}{s^2 + 3\, s + 1} \cdot \frac{0{,}24}{s}$$

$$H_1(s) = \frac{0{,}3\, s + 0{,}6}{s\left(s^2 + 3\, s + 1\right)}$$

Expandindo em frações parciais

$$H_1(s) = \frac{0{,}3\, s + 0{,}6}{s\left(s^2 + 3\, s + 1\right)} = \frac{0{,}6}{s} - \frac{0{,}0367}{s + 2{,}618} - \frac{0{,}568}{s + 0{,}382}$$

Transformada inversa de Laplace

$$h_1(t) = 0{,}6 - 0{,}0367\, e^{-2{,}618 \cdot t} - 0{,}568\, e^{-0{,}382 \cdot t}$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1,25}{s^2 + 3\,s + 1} \qquad H_2(s) = \frac{1,25}{s^2 + 3\,s + 1} \cdot \frac{0,24}{s}$$

$$H_2(s) = \frac{0,3}{s\left(s^2 + 3\,s + 1\right)}$$

Expandindo em frações parciais

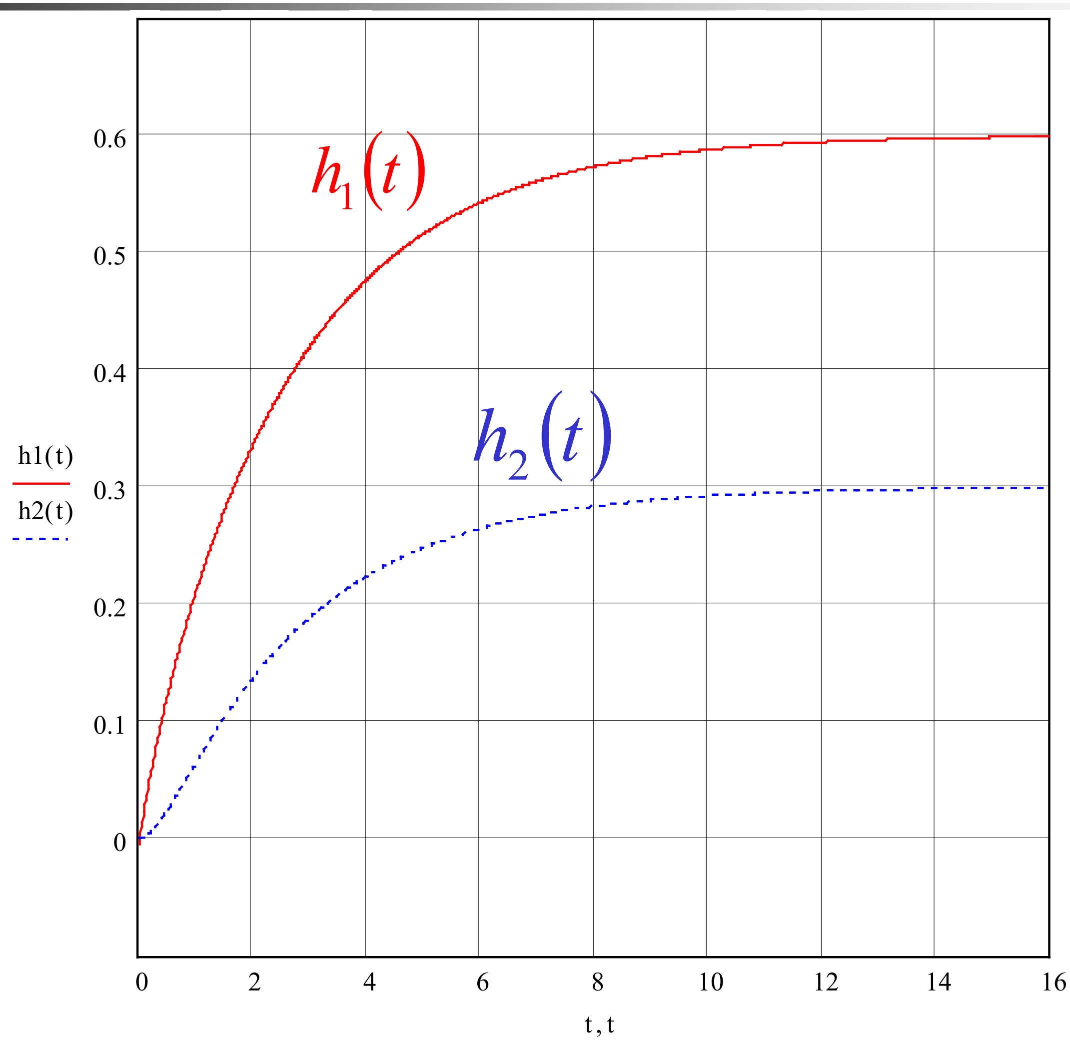
$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{0,3}{s\left(s^2 + 3\,s + 1\right)} = \frac{0,3}{s} + \frac{0,0512}{s + 2,618} - \frac{0,351}{s + 0,382}$$

Transformada inversa de Laplace

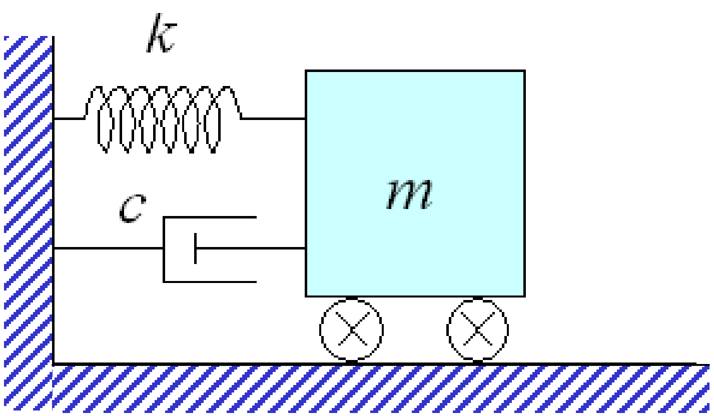
$$h_2(t) = 0,3 + 0,0512\,e^{-2,618 \cdot t} - 0,351\,e^{-0,382 \cdot t}$$

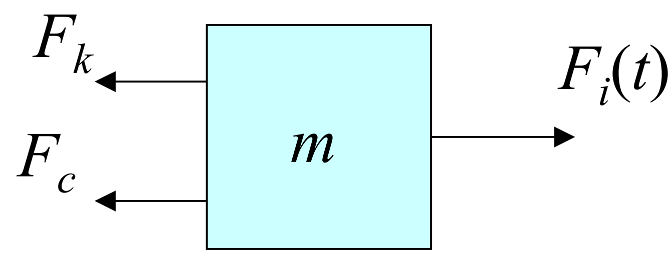
$$h_1(t) = 0{,}6 - 0{,}0367\, e^{-2{,}618 \cdot t} - 0{,}568\, e^{-0{,}382 \cdot t}$$

$$h_2(t) = 0{,}3 + 0{,}0512\, e^{-2{,}618 \cdot t} - 0{,}351\, e^{-0{,}382 \cdot t}$$



Exemplos físicos de sistemas de segunda ordem





$$F_k = k\,x \qquad F_c = c\,\frac{dx}{dt}$$

$$m\,a = \sum F_e \qquad \sum F_e = F_i(t) - F_c - F_k$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + k\,x = F_i(t) \qquad (1)$$

No regime permanente quando $t < 0$

$$m.0 + c.0 + k\,x_s = F_s(t) \qquad (2)$$

Subtraindo a equação 2 da equação 1:

$$m\frac{d^2(x-x_s)}{dt^2} + c\frac{d(x-x_s)}{dt} + k(x-x_s) = F_i(t) - F_s(t) \qquad (3)$$

VARIÁVEIS DESVIO

$$X = x - x_s \qquad\qquad F(t) = F_i(t) - F_s(t)$$

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + c\frac{d\,X}{dt} + k\,X = F(t) \qquad (4)$$

Freqüência angular natural $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Razão de amortecimento $$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

Entrada do sistema $$E(t) = \frac{F(t)}{k}$$

$$\frac{m}{k}\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{c}{k}\frac{dX}{dt} + X = \frac{F(t)}{k} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dX}{dt} + X = E(t) \qquad (5)$$

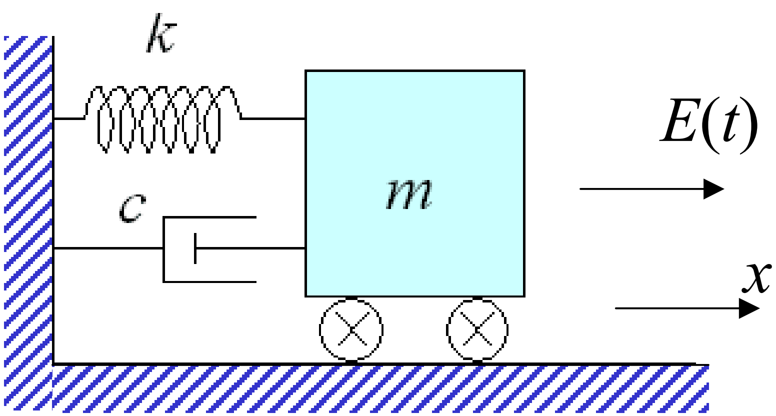
Transformada de Laplace

$$\frac{s^2\,X(s)}{\omega_n^2}+\frac{2\,\zeta\,s\,X(s)}{\omega_n}+X(s)=E(s) \qquad (6)$$

$$X(s)\left(s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2\right)=E(s)\,\omega_n^2$$

$$\frac{X(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2}{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

Exemplo:



$$m = 2{,}27\,kg$$

$$k = 2{,}75 \times 10^3\ N/m$$

$$c = 2{,}48\ N.s/m$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}75 \times 10^3\ N/m}{2{,}27 kg}} = 34{,}806\,Hz$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{2{,}48\ N.s/m}{2\sqrt{2{,}27 kg . 2{,}75 \times 10^3\ N/m}} = 0{,}016$$

Entrada degrau

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 27{,}5\,N & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{F(t)}{k} = \frac{27{,}5\,N}{2{,}75 \times 10^3\ N/m} = 0{,}01\,m$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 0{,}01\,m & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$E(s) = \frac{0{,}01}{s}$$

$$X(s) = \frac{b_0\ \omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}$$

$$X(s) = \frac{0{,}01\,.34{,}806^2}{s\left(s^2 + 2.0{,}016.34{,}806\,s + 34{,}806^2\right)}$$

$$X(s) = \frac{12{,}11}{s\left(s^2 + 1{,}093\,s + 1211\right)}$$

$$X(s)=\frac{12,11}{s\left(s^2+1,093\,s+1211\right)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$X(s)=\frac{12,11}{s\left(s+0,55+34,8i\right)\left(s+0,55-34,8i\right)}$$

$$X(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{\left(s+0,55+34,8i\right)}+\frac{C}{\left(s+0,55-34,8i\right)}$$

$$X(s)=\frac{0,01}{s}+\frac{-5\times10^{-3}-8\times10^{-5}i}{\left(s+0,55+34,8i\right)}+\frac{-5\times10^{-3}+8\times10^{-5}i}{\left(s+0,55-34,8i\right)}$$

Transformada inversa de Laplace:

$$x(t)=0,01-5\times10^{-3}e^{-(0,55+34,8i)t}-8\times10^{-5}ie^{-(0,55+34,8i)t}\ldots$$
$$-5\times10^{-3}e^{-(0,55-34,8i)t}+8\times10^{-5}ie^{-(0,55-34,8i)t}$$

$$x(t) = 0{,}01 - 5\times10^{-3}\underline{e}^{-(0{,}55+34{,}8i)t} - 8\times10^{-5}i\underline{e}^{-(0{,}55+34{,}8i)t}\ \ldots$$
$$-5\times10^{-3}\underline{e}^{-(0{,}55-34{,}8i)t} + 8\times10^{-5}i\underline{e}^{-(0{,}55-34{,}8i)t}$$

$$x(t) = 0{,}01 - e^{-(0{,}55)t}\left(\begin{array}{r} 5\times10^{-3}e^{(-34{,}8i)t} + 8\times10^{-5}ie^{(-34{,}8i)t}\ \ldots \\ + 5\times10^{-3}e^{(34{,}8i)t} - 8\times10^{-5}ie^{(34{,}8i)t} \end{array}\right)$$

$$x(t) = 0{,}01 - e^{-(0{,}55)\,t}\ \cdot$$

$$\left[5\times10^{-3}\left(e^{(34{,}8i)t} + e^{(-34{,}8i)t}\right) - 8\times10^{-5}i\left(e^{(34{,}8i)t} - e^{(-34{,}8i)t}\right)\right]$$

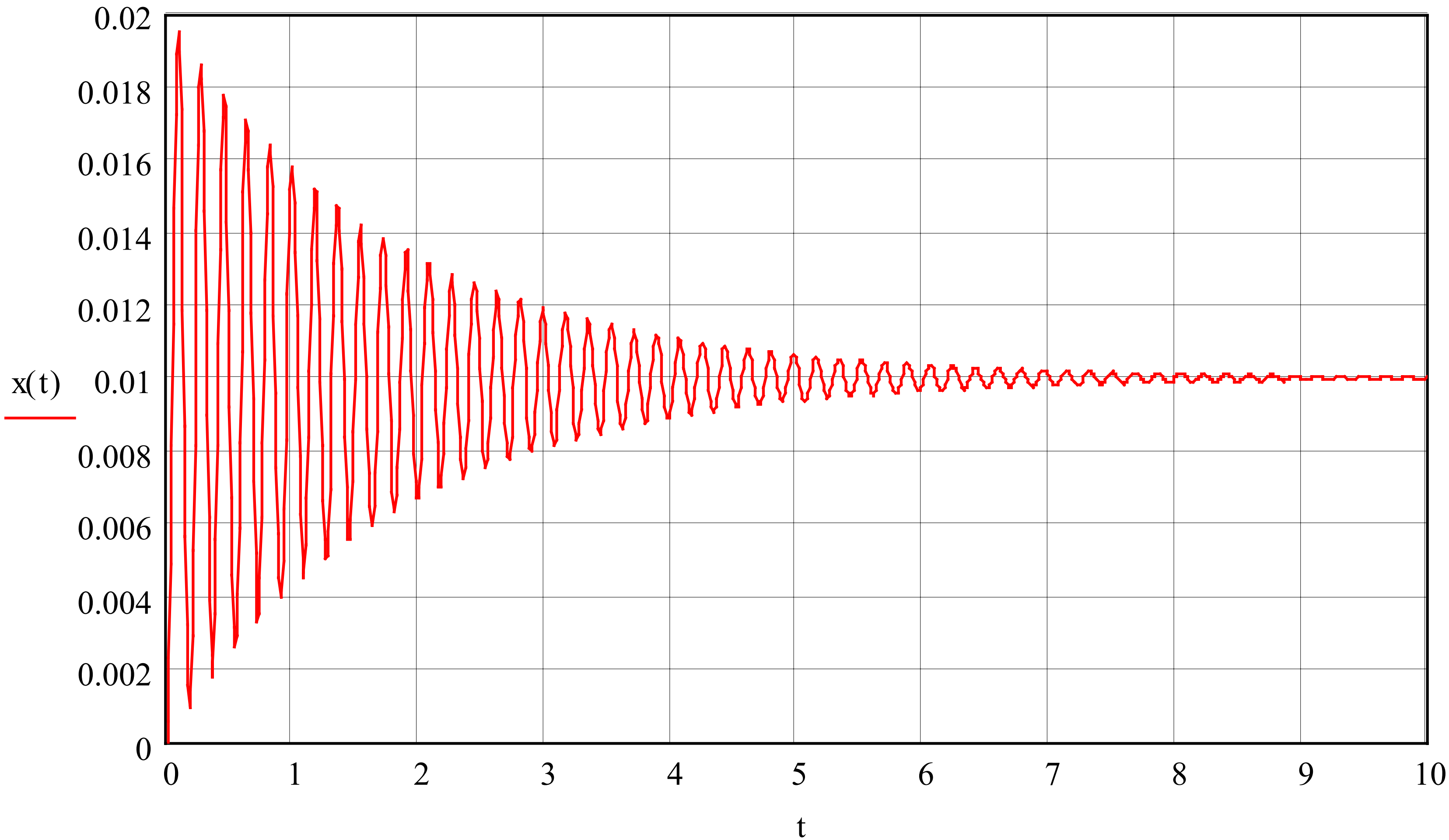
Identidades de Euler:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad e^{(34{,}8i)t} + e^{(-34{,}8i)t} = 2\cos 34{,}8\,t$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad e^{(34{,}8i)t} - e^{(-34{,}8i)t} = 2i\operatorname{sen} 34{,}8\,t$$

$$x(t) = 0{,}01 - e^{-(0{,}55)t}\left(0{,}01\cos(34{,}8\,t) + 0{,}00016\ \operatorname{sen}(34{,}8\,t)\right)$$

$$x(t) = 0{,}01\left[1 - e^{-(0{,}55)t}\left(\cos(34{,}8\,t) + 0{,}016\ \operatorname{sen}(34{,}8\,t)\right)\right]$$



$$x(t) = 0{,}01\left[1 - e^{-(0{,}55)t}\left(\cos(34{,}8\,t) + 0{,}016\ \operatorname{sen}(34{,}8\,t)\right)\right]$$

Aplicando a identidade trigonométrica:

$$p\cos A + q\operatorname{sen} A = r\operatorname{sen}(A + \Phi)$$

onde:

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} \qquad \tan\Phi = \frac{p}{q}$$

$$x(t) = 0{,}01\left[1 - e^{-(0{,}55)t}\operatorname{sen}(34{,}8\,t + 1{,}555)\right]$$

Resposta de um sistema de 2ª ordem a uma entrada degrau

$$x(t) = b_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{(-\zeta\omega_n t)}\operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\ t + \Phi\right)\right]$$

Mathcad Document

Entrada Impulso

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 27{,}5\,N & \rightarrow t = 0 \\ 0 & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{F(t)}{k} = \frac{27{,}5N}{2{,}75 \times 10^3 \; {}^{N}\!/\!{}_{m}} = 0{,}01\,m$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 0{,}01\,m & \rightarrow t = 0 \\ 0 & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$E(s) = 0{,}01$$

$$X(s)=\frac{\omega_n^2}{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}E(s)$$

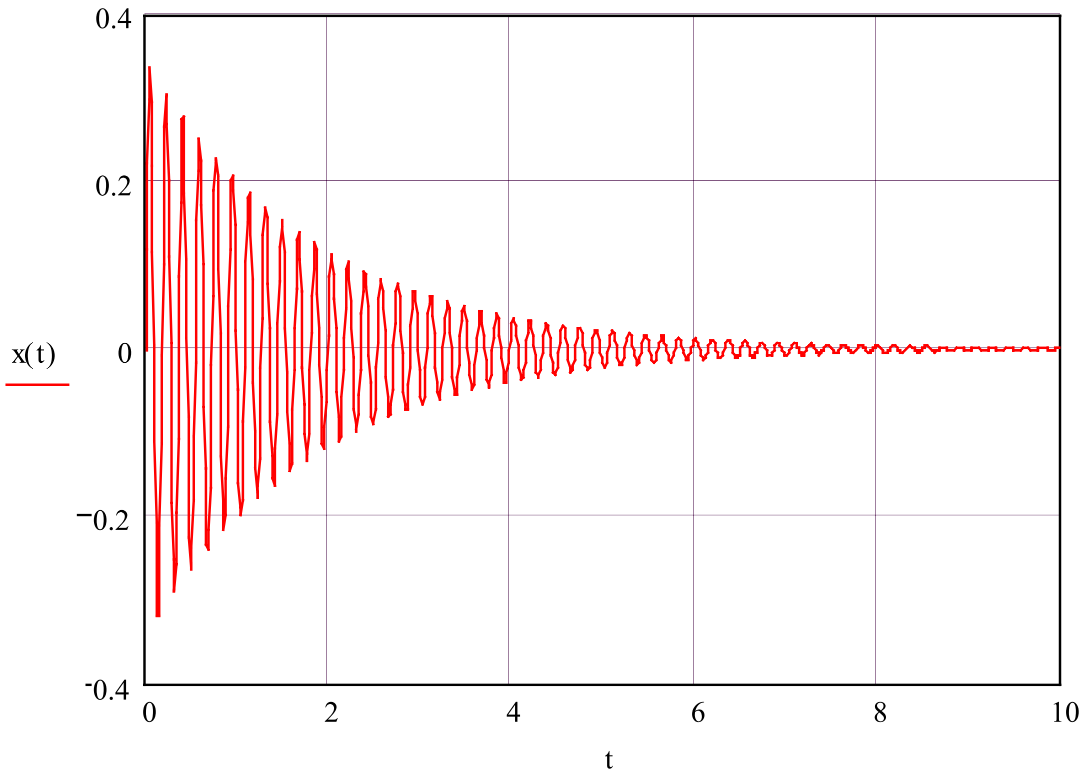
$$E(s)=0{,}01 \qquad \omega_n=34{,}806\,Hz \qquad \zeta=0{,}016$$

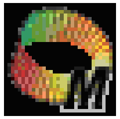
$$X(s)=\frac{12{,}11}{s^2+1{,}093\,s+1211}$$

Transformada inversa de Laplace

$$x(t)=0{,}35\,e^{(-0{,}55\,t)}\,\mathrm{sen}(34{,}8\,t)$$

$$x(t) = 0{,}35\, e^{(-0{,}55\, t)}\, \mathrm{sen}(34{,}8\, t)$$





Mathcad Document

Resposta de um sistema de 2ª ordem a uma entrada impulso

$$\theta_0 = \frac{b_0 \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta \omega_n t)}\, \mathrm{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\; t\right)$$

Entrada Rampa

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 27{,}5\, {}^{N}\!/_{s} .t & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{F(t)}{k} = \frac{27{,}5\, {}^{N}\!/_{s} .t}{2{,}75 \times 10^{3}\, {}^{N}\!/_{m}} = 0{,}01\, {}^{m}\!/_{s} .t$$

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \rightarrow t < 0 \\ 0{,}01.t & \rightarrow t > 0 \end{cases}$$

$$E(s) = \frac{0{,}01}{s^{2}}$$

$$X(s)=\frac{\omega_n^2}{\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)}E(s)$$

$$E(s)=\frac{0{,}01}{s^2} \qquad \omega_n=34{,}806\,Hz \qquad \zeta=0{,}016$$

$$X(s)=\frac{12{,}11}{s^2\left(s^2+1{,}093\,s+1211\right)}$$

Transformada inversa de Laplace

$$x(t)=0{,}01.t-9\times10^{-6}+9\times10^{-6}\,e^{(-0{,}55\,t)}\cos(34{,}8\,t)\ldots$$

$$-2{,}9\times10^{-4}\,e^{(-0{,}55\,t)}\operatorname{sen}(34{,}8\,t)$$

$$x(t) = 0{,}01\,t - 9\times10^{-6} + 9\times10^{-6}\,e^{(-0{,}55\,t)}\cos(34{,}8\,t)\ldots$$

$$-\,2{,}9\times10^{-4}\,e^{(-0{,}55\,t)}\,\mathrm{sen}(34{,}8\,t)$$