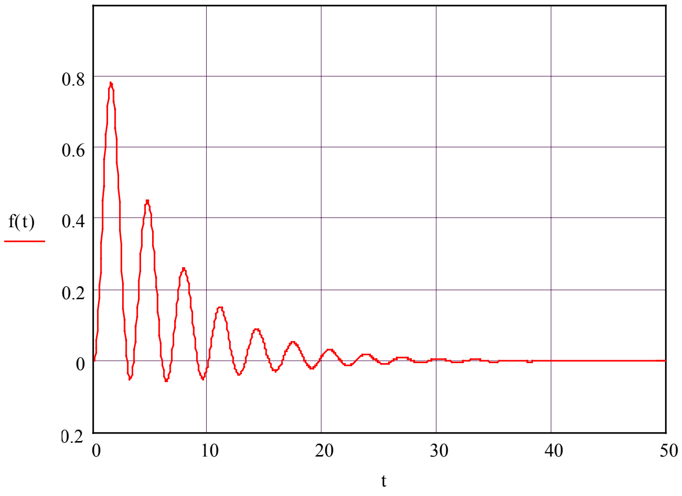
ESTABILIDADE

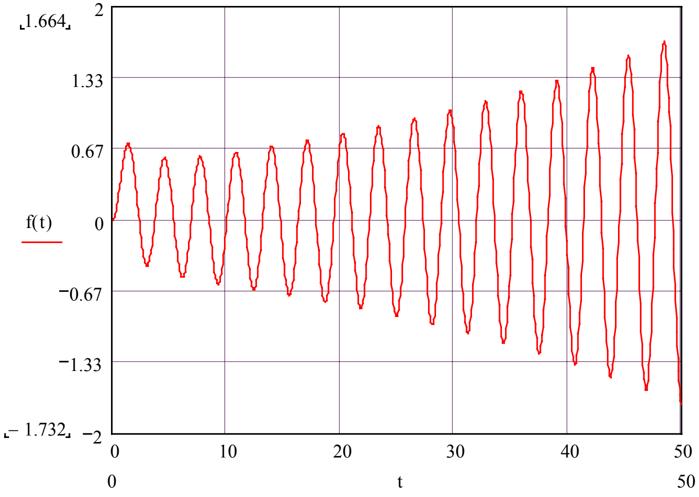
- Pólos
- Zeros
- Estabilidade

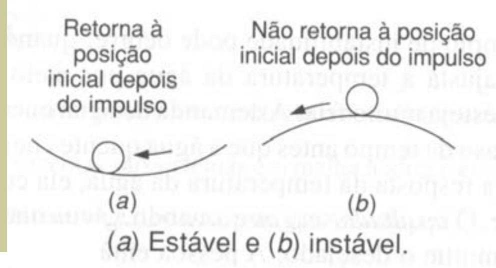
Introdução

Uma característica importante para um sistema de controle é que ele seja estável.

Se uma entrada finita é aplicada ao sistema de controle, então a saída deverá ser finita e não infinita, isto é, aumentar sem limite.



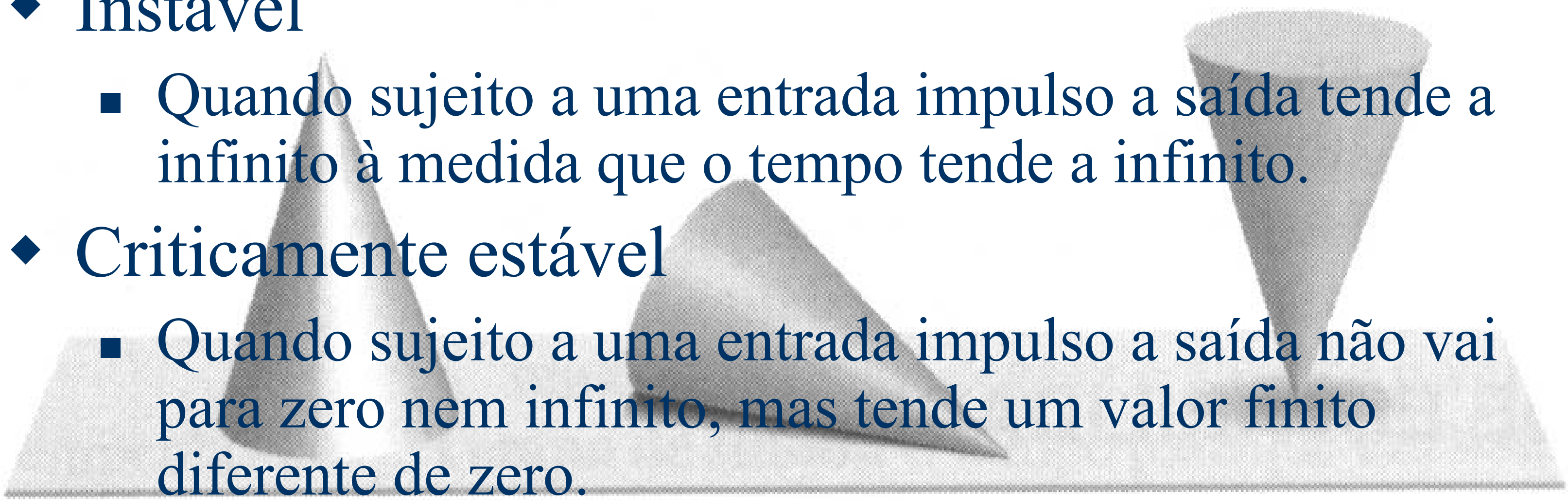




(a) Estável e (b) instável.

ESTABILIDADE

- Estável
  - Quando sujeito a uma entrada impulso a saída tende a zero à medida que o tempo tende a infinito.
- Instável
  - Quando sujeito a uma entrada impulso a saída tende a infinito à medida que o tempo tende a infinito.
- Criticamente estável
  - Quando sujeito a uma entrada impulso a saída não vai para zero nem infinito, mas tende um valor finito diferente de zero.



Estável | Criticamente estável | Instável

Pólos e Zeros

Função de transferência

$$G(s)=\frac{K\left(s^{m}+a_{m-1}s^{m-1}+a_{m-2}s^{m-2}+\ldots+a_{1}s+a_{0}\right)}{\left(s^{n}+b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_{1}s+b_{0}\right)}$$

Se as raízes do denominador e do numerador são conhecidas:

$$G(s)=\frac{K(s+z_{1})(s+z_{2})\ldots(s+z_{m})}{(s+p_{1})\ (s+p_{2})\ldots(s+p_{n})}$$

$-z_1, -z_2 \ldots -z_m$ são chamados *zeros*

São os valores de *s* para os quais a função de transferência é zero

$-p_1, -p_2 \ldots -p_n$ são chamados *pólos*

São os valores de *s* para os quais a função de transferência é infinita

ZEROS são os valores de *s* para os quais a função de transferência é *zero*

PÓLOS são os valores de *s* para os quais a função de transferência é *infinita*, isto é, eles fazem o denominador tornar-se zero

Exemplo: $$G(s)=\frac{(s-1)}{(s^2-6s+8)}=\frac{(s-1)}{(s-4)\,(s-2)}$$

Pólos $= +4$ e $+2$ *Zero* $= +1$

Pólos e *zeros* podem ser quantidades complexas ou reais

$$G(s)=\frac{(s-2)}{(s^2+1)}=\frac{(s-2)}{(s-j1)\,(s+j1)}$$

Pólos $= +j1$ e $-j1$ *Zero* $= +2$

$$s=\sigma+j\omega$$

Exemplo: Determinar os *pólos* e os *zeros* da Função de Transferência.

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s - 5}{s^4 + s^3 - 14s^2 - 24s} = \frac{(s+5)(s-1)}{(s-0)\,(s+2)\,(s+3)\,(s-4)}$$

Os *pólos* são: 0, –2, –3, e +4.

Os *zeros* são: –5 e +1.

Exemplo: Determinar os *pólos* e os *zeros* da Função de Transferência.

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2 + s + 3} = \frac{(s+4)}{(s+0{,}5+j1{,}7)\,(s+0{,}5-j1{,}7)}$$

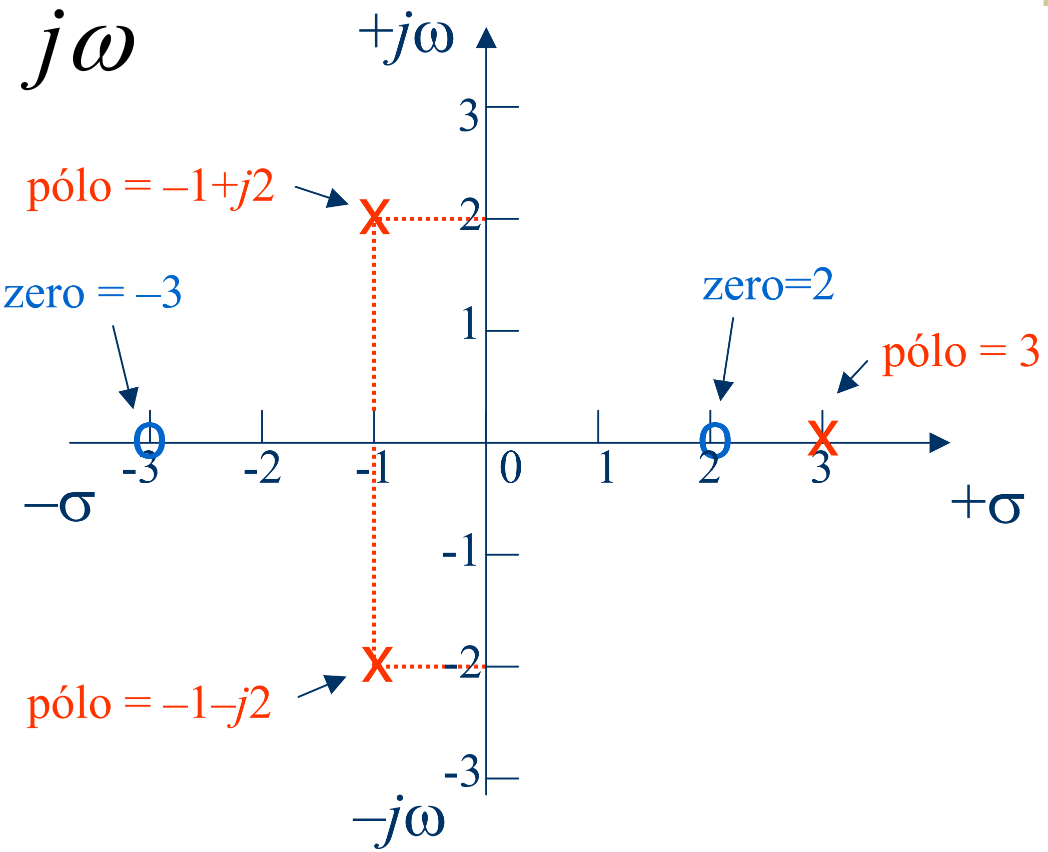
Os *pólos* são: –0,5 $-\,j1{,}7$ e –0,5 $+\,j1{,}7$.

O *zero* é: –4.

$$s = \sigma + j\omega$$

DIAGRAMA DE PÓLOS E ZEROS

$$s = \sigma + j\omega$$



- Um *pólo* é marcado com x
- Um *zero* é marcado com o

ESTABILIDADE E PÓLOS

A estabilidade de um sistema pode ser determinada considerando a variação da saída com o tempo quando é sujeito a uma entrada impulso.

- Estável
  - A saída diminui com o tempo
- Instável
  - A saída aumenta com o tempo

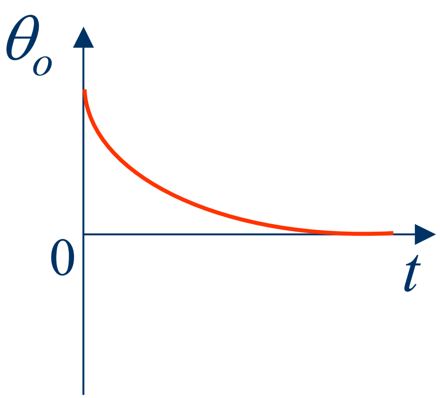
Considere um sistema sem zeros e com um pólo em –2

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = \frac{1}{s+2}\theta_i(s)$$

Entrada impulso $\theta_i(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = \frac{1}{s+2}$

Transformada inversa de Laplace $\Rightarrow \quad \theta_o(t) = e^{-2t}$

O valor de e^{-2t} diminui com o tempo



O sistema é <u>ESTÁVEL</u>

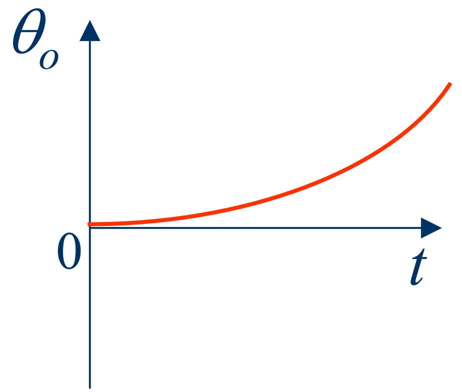
Considere um sistema sem zeros e com um pólo em +2

$$G(s) = \frac{1}{s-2} \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = \frac{1}{s+2}\theta_i(s)$$

Entrada impulso $\theta_i(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = \frac{1}{s-2}$

Transformada inversa de Laplace $\Rightarrow \quad \theta_o(t) = e^{2t}$

O valor de e^{2t} aumenta com o tempo



O sistema é <u>INSTÁVEL</u>

Considere um sistema sem zeros e com pólos em $(-2 \pm j1)$

$$G(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)]\,[s-(-2-j1)]}$$

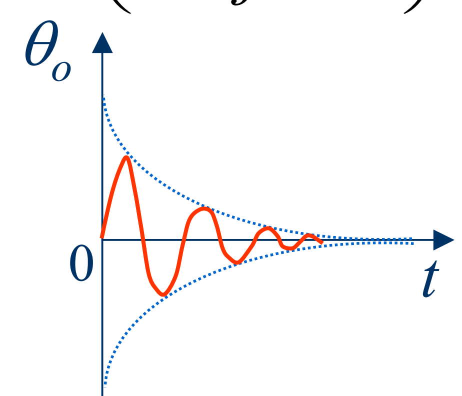
$$\Rightarrow \qquad \theta_o(s) = \frac{1}{[s-(-2+j1)]\,[s-(-2-j1)]}\theta_i(s)$$

Entrada impulso $\quad \theta_i(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_o(s) = \dfrac{1}{[s-(-2+j1)]\,[s-(-2-j1)]}$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Transformada inversa de Laplace} \\ \dfrac{1}{(s+a)(s+b)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_o(t) = e^{-2t}\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{j2}\right)$$

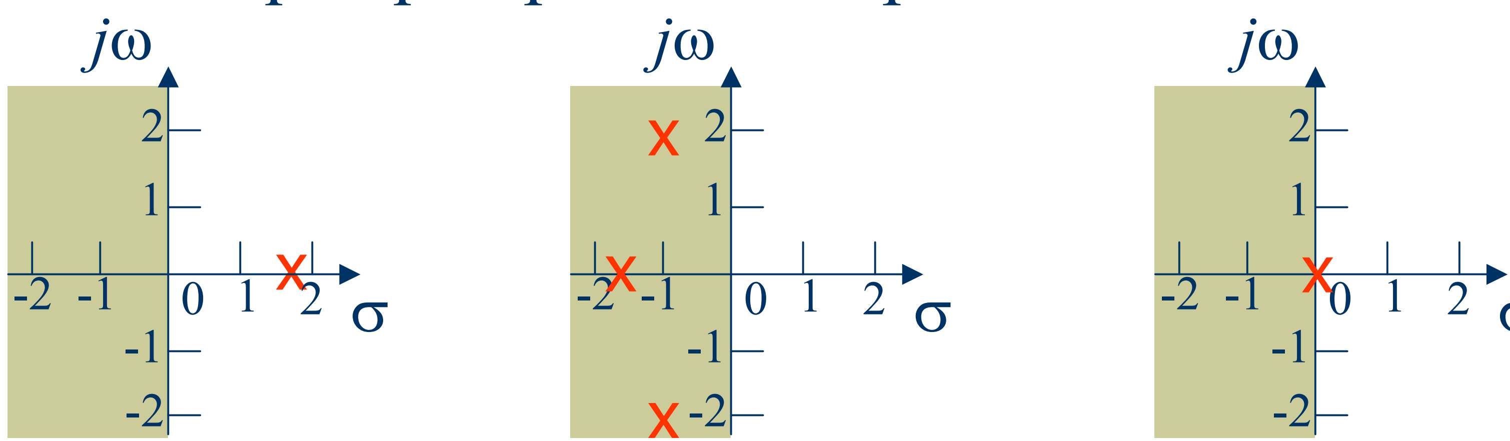
$$\theta_o(t) = e^{-2t}\,\text{sen}\,t$$

O valor de $e^{-2t}\,\text{sen}\,t$ diminui com o tempo

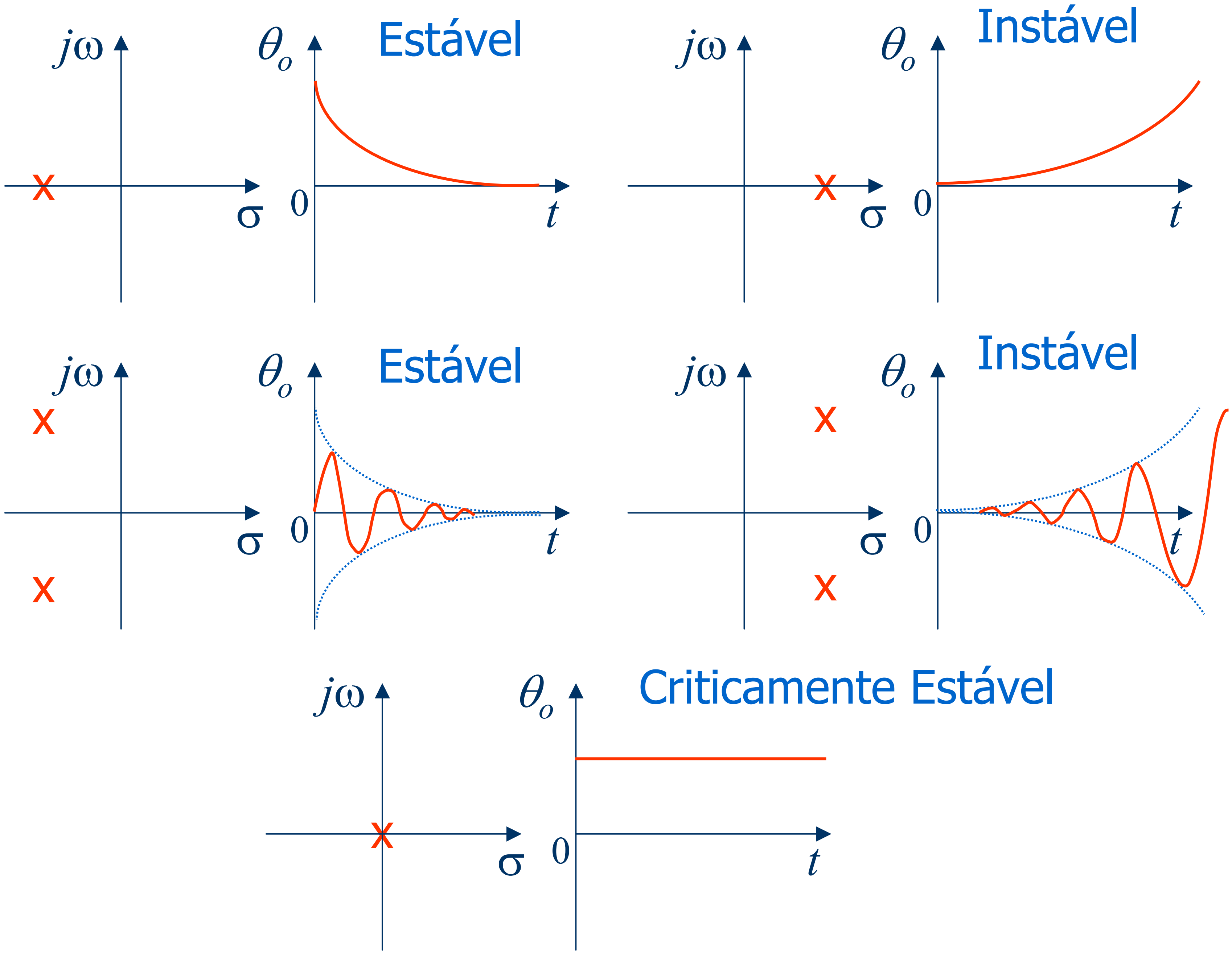


O sistema é <u>ESTÁVEL</u>

- O sistema será INSTÁVEL
  - Se qualquer pólo tiver a parte real positiva
- O sistema será ESTÁVEL
  - Se todos os pólos tiverem a parte real negativa
- O sistema será CRITICAMENTE ESTÁVEL
  - Se qualquer pólo tiver a parte real nula



- A saída será OSCILATÓRIA se existirem pólos envolvendo $\pm j\omega$


jω
θo
Estável
σ
0
t
jω
θo
Instável
σ
0
t
jω
θo
Estável
σ
0
t
jω
θo
Instável
σ
0
t
jω
θo
Criticamente Estável
σ
0
t

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

A determinação da estabilidade de um sistema envolve:

- A determinação das raízes do denominador da função de transferência
- A consideração de que a parte real de qualquer uma delas seja negativa

As raízes não são muito facilmente obtidas se o denominador tem a forma:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

e n é maior que 3 ou 4

O *critério de Routh-Hurwitz* apresenta um método que pode ser usado em tais situações

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

O primeiro teste consiste em inspecionar os coeficientes da equação acima:

- Se os coeficientes são todos positivos e nenhum é zero, o sistema <u>pode ser estável</u>.
- Se qualquer coeficiente é negativo, o sistema <u>é instável.</u>
- Se qualquer coeficiente é zero, o sistema pode ser no máximo criticamente estável.

EXEMPLOS

$\left(s^3 + 2s^2 + 3s + 1\right)$ $\Rightarrow$ Pode ser estável

$\left(s^3 - 2s^2 + 3s + 1\right)$ $\Rightarrow$ É instável

$\left(s^3 + 2s^2 + 3s\right)$ $\Rightarrow$ Pode ser no máximo criticamente estável

Para sistemas que têm denominadores que podem ser estáveis, um segundo teste deve ser realizado.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Arranjo de **Routh**:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

- As linhas seguintes no arranjo são determinadas por cálculos feitos a partir dos elementos nas duas linhas imediatamente acima.
- Linhas sucessivas são calculadas até que apenas zeros apareçam.
- O arranjo deve conter (n+1) linhas
- Uma linha correspondente a cada um dos elementos s^n a s^0.

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^2 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
s^1 & y_1 & y_2 & & \\
s^0 & z_1 & & &
\end{array}$$

Elementos da 3ª linha

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3}$$

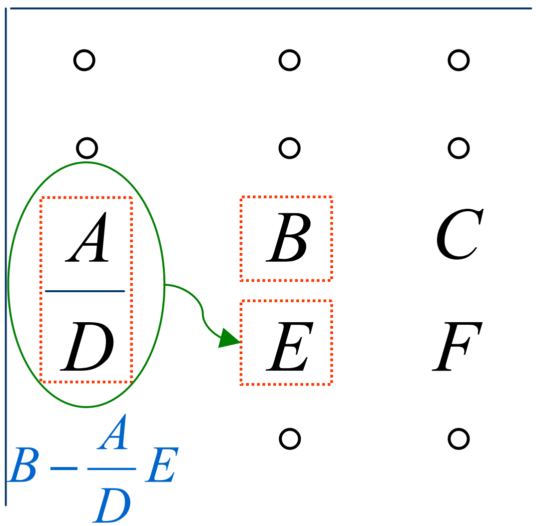
$$b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5}$$

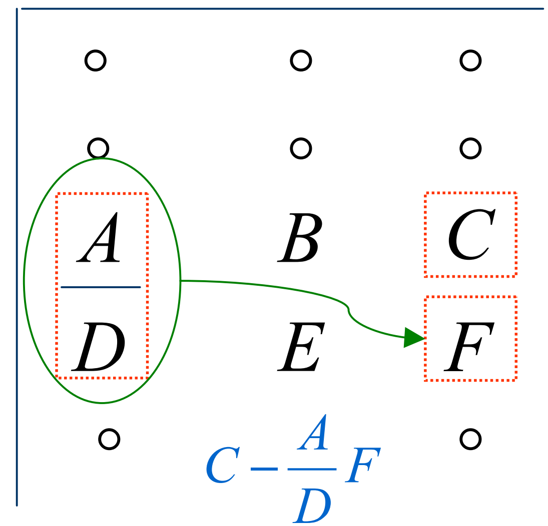
Elementos da 4ª linha

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2$$

$$c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_3$$

Regras práticas para determinar os elementos da matriz:





Quando o arranjo estiver completo:

- Se todos os elementos na primeira coluna são positivos
  - Todas as raízes tem a parte real negativa
  - O sistema é *ESTÁVEL*
- Se existem elementos negativos na primeira coluna
  - O número de trocas de sinal na primeira coluna é igual ao número de raízes com a parte real positiva
  - O sistema é *INSTÁVEL*

EXEMPLO: Usar o critério Routh-Hurwitz para determinar se o sistema que tem a seguinte função de transferência é estável:

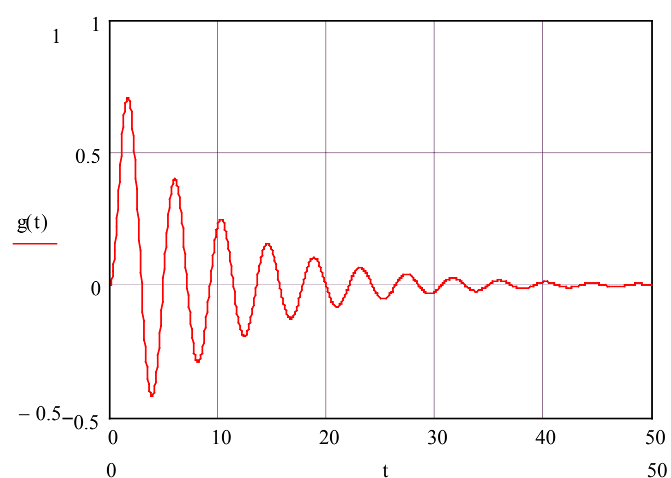
$$G(s) = \frac{2s+1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1}$$

$$\frac{A}{D} \quad \begin{matrix} B \\ E \end{matrix} \qquad\qquad \frac{A}{D} \quad \begin{matrix} C \\ F \end{matrix}$$

s^4	1	3	1
s^3	2	4	
s^2	1	1	
s^1	2		
s^0	1		

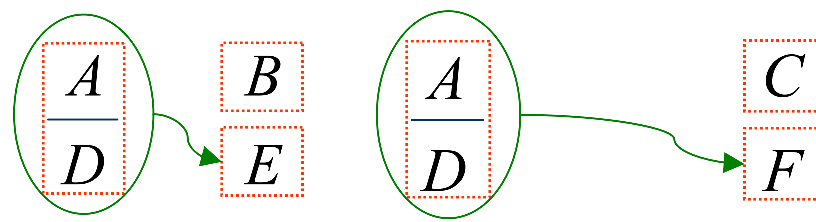
A primeira coluna tem todos os elementos positivos.

O sistema é *ESTÁVEL*



EXEMPLO: Usar o critério Routh-Hurwitz para determinar se o sistema que tem a seguinte função de transferência é estável:

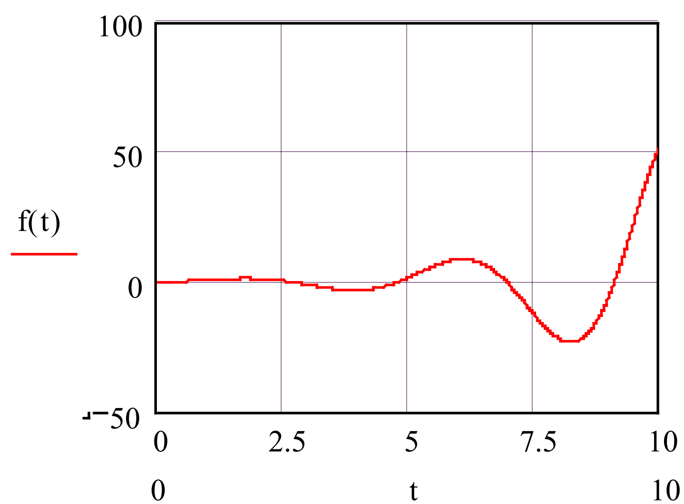
$$G(s) = \frac{2s+1}{s^4 + s^3 + s^2 + 4s + 1}$$



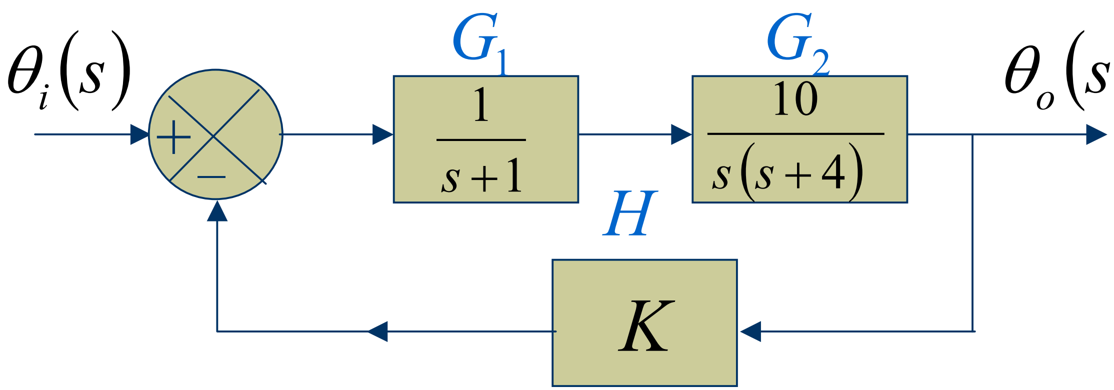
$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 1 & 4 & \\
s^2 & -3 & 1 & \\
s^1 & 13/3 & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}$$

A primeira coluna tem um elemento negativo.

O sistema é *INSTÁVEL*



EXEMPLO: Para o sistema mostrado, qual a faixa de K que resulta em estabilidade?



$$G(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{(s+1)} \frac{10}{s(s+4)}}{1 + \frac{1}{(s+1)} \frac{10}{s(s+4)} K}$$

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10K}$$

$$G(s)=\frac{10}{s^3+5s^2+4s+10K}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 5 & 10K \\ s^1 & 4-2K & \\ s^0 & 10K & \end{array}$$

Para que a primeira coluna tenha somente valores positivos:

$$\begin{cases} 4-2K>0 & \qquad K<2 \\ 10K>0 & \qquad K>0 \end{cases}$$

K deve estar entre 0 e 2

$$0<K<2$$