Transformada Z inversa

A seqüência de amostras representada por uma transformada Z, isto é, a transformada Z inversa, pode ser obtida de algumas formas, por exemplo, uma aproximação por divisões sucessivas baseada nas frações parciais.

A aproximação por divisões sucessivas é matematicamente a mais fácil de aplicar.

Considerando a função transformada

$$F(z) = \frac{5}{z+1}$$

O procedimento consiste em dividir o numerador pelo denominador em divisões sucessivas

O procedimento consiste em:

1. Multiplicar o numerador pelo denominador
2. Dividir pela maior potência de z
3. Subtrair o resultado do numerador na 1a divisão, ou do resultado da subtração anterior nas divisões sucessivas
4. Separar o termo de mais baixa ordem

$$F(z)=\frac{5}{z+1}$$

$$\begin{array}{l}
\;5z^{-1}-5z^{-2}+5z^{-3}-5z^{-4}+\ldots \\
\hline
z+1\,\big)\,5 \\
\quad\;\; \underline{5+5z^{-1}} \\
\qquad\; -5z^{-1} \\
\qquad\; \underline{-5z^{-1}-5z^{-2}} \\
\qquad\qquad\qquad 5z^{-2} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{5z^{-2}+5z^{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; -5z^{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\; \underline{-5z^{-3}-5z^{-4}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5z^{-4}
\end{array}$$

$$\div z$$

$$\times(z+1)\div z \quad =\times\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

Assim:

$$F(z) = 5z^{-1} - 5z^{-2} + 5z^{-3} - 5z^{-4} + \ldots$$

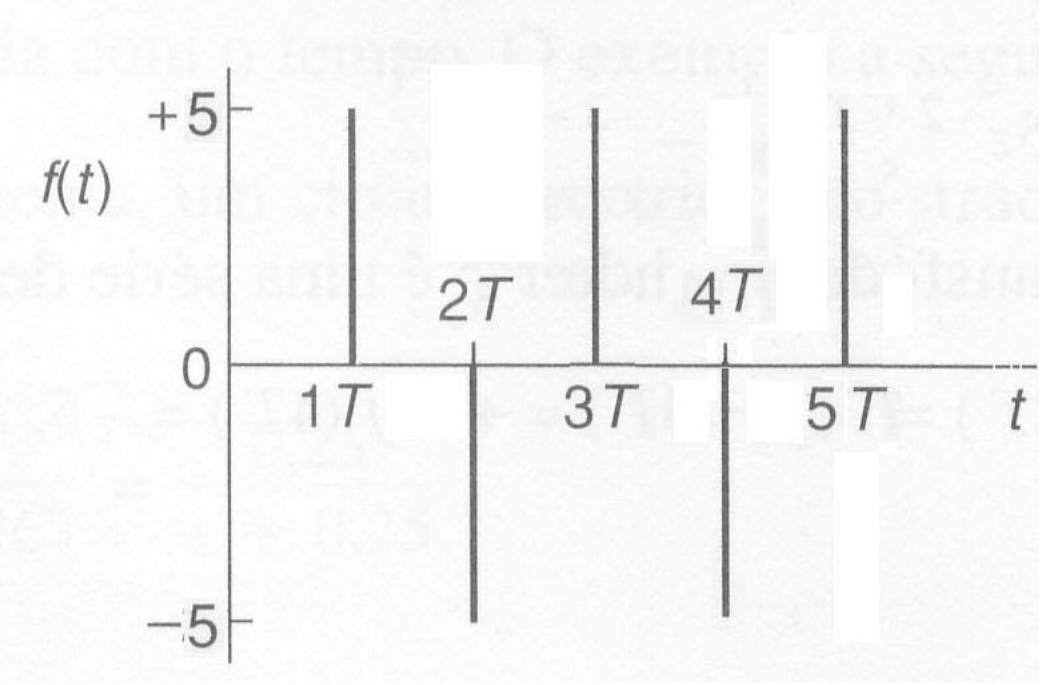
Portanto, a transformada inversa é uma série de amostras:

$$f(1T) = 5,$$

$$f(2T) = -5,$$

$$f(3T) = +5,$$

$$f(4T) = -5 \ldots$$



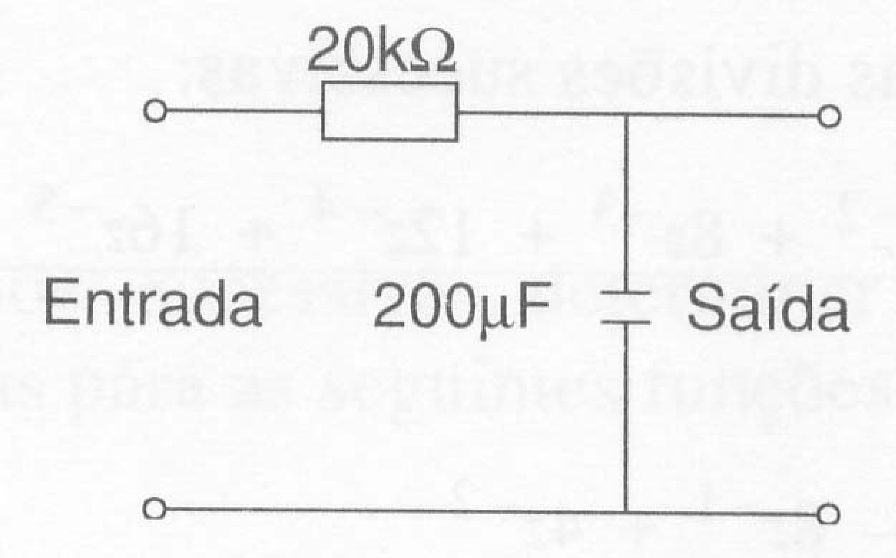
Sistemas de dados amostrados

Na análise de sistemas de dados amostrados considera-se as funções de transferência dos elementos constituintes e suas combinações para resultar em uma função de transferência global.
A transformada Z auxilia a manipulação da equação de forma a se obter a saída para uma particular entrada.
Finalmente, a transformada inversa pode ser obtida para mostrar como o sinal varia com o tempo.

O exemplo a seguir ilustra isto.

Exemplo

Considere o sistema, um circuito elétrico, mostrado na figura



Função de transferência:

$$G(s)=\frac{1/RC}{s+1/RC}=\frac{0,25}{s+0,25}$$

A transformada Z da função de transferência é:

$$G(z) = transformada\ Z\ de\ G(s)$$

$$G(z) = transformada\ Z\ de\left(\frac{0{,}25}{s+0{,}25}\right)$$

Esta expressão é da forma $\frac{1}{s+a}$ E a transformada Z dessa função é: $\frac{z}{z-e^{-0,25T}}$, onde *T* é o período de amostragem

Assim:

$$G(z) = \frac{0{,}25\,z}{z-e^{-0,25T}}$$

Considerando o período de amostragem de $T = 1s$

$$G(z) = \frac{0,25\ z}{z - e^{-0,25T}} = \frac{0,25\ z}{z - 0,78} \qquad (*)$$

A função de transferência *G(s)* descreve a relação entre a entrada e a saída quando ambas estão no domínio *s*. Da mesma forma, a função de transferência *G(z)* descreve a relação entre a entrada e a saída quando ambas estão no domínio *z* :

$$G(s) = \frac{saída\,(s)}{entrada\,(s)} \qquad\qquad G(z) = \frac{saída\,(z)}{entrada\,(z)}$$

Considerando a entrada impulso de 4V, e como a transformada *z* de um impulso é 1, a equação * tem como saída:

$$Saída\left(z\right)=\frac{0,25\,z}{z-0,78}$$

De forma a obter a transformação inversa, para ver como a saída varia com o tempo, a expressão é reorganizada por meio de divisões sucessivas:

$$1 + 0,78z^{-1} + 0,61z^{-2} + 0,47z^{-3} + 0,37z^{-4} + \ldots$$

$$z - 0,78)\,z$$

$$\underline{z - 0,78}$$

$$+0,78$$

$$\underline{0,78 - 0,61z^{-1}}$$

$$+0,61z^{-1}$$

$$\underline{+0,61z^{-1} - 0,47z^{-2}}$$

$$0,47z^{-2}$$

$$\underline{0,47z^{-2} - 0,37z^{-3}}$$

$$0,37z^{-3}$$

OBS: o resultado está dividido por 0,78, para obter uma resposta adimensional

A saída pode ser escrita como:

$$Saída\left(z\right)=1+0{,}78z^{-1}+0{,}61z^{-2}+0{,}47z^{-3}+0{,}37z^{-4}+\ldots$$

A transformada inversa gera a seguinte série de pulsos:

$$f\left(0T\right)=1,$$

$$f\left(1T\right)=0{,}78,$$

$$f\left(2T\right)=0{,}61,$$

$$f\left(3T\right)=0{,}47,$$

$$f\left(4T\right)=0{,}37\ldots$$

Podemos determinar a saída do sistema em regime permanente pelo teorema do valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z)$$

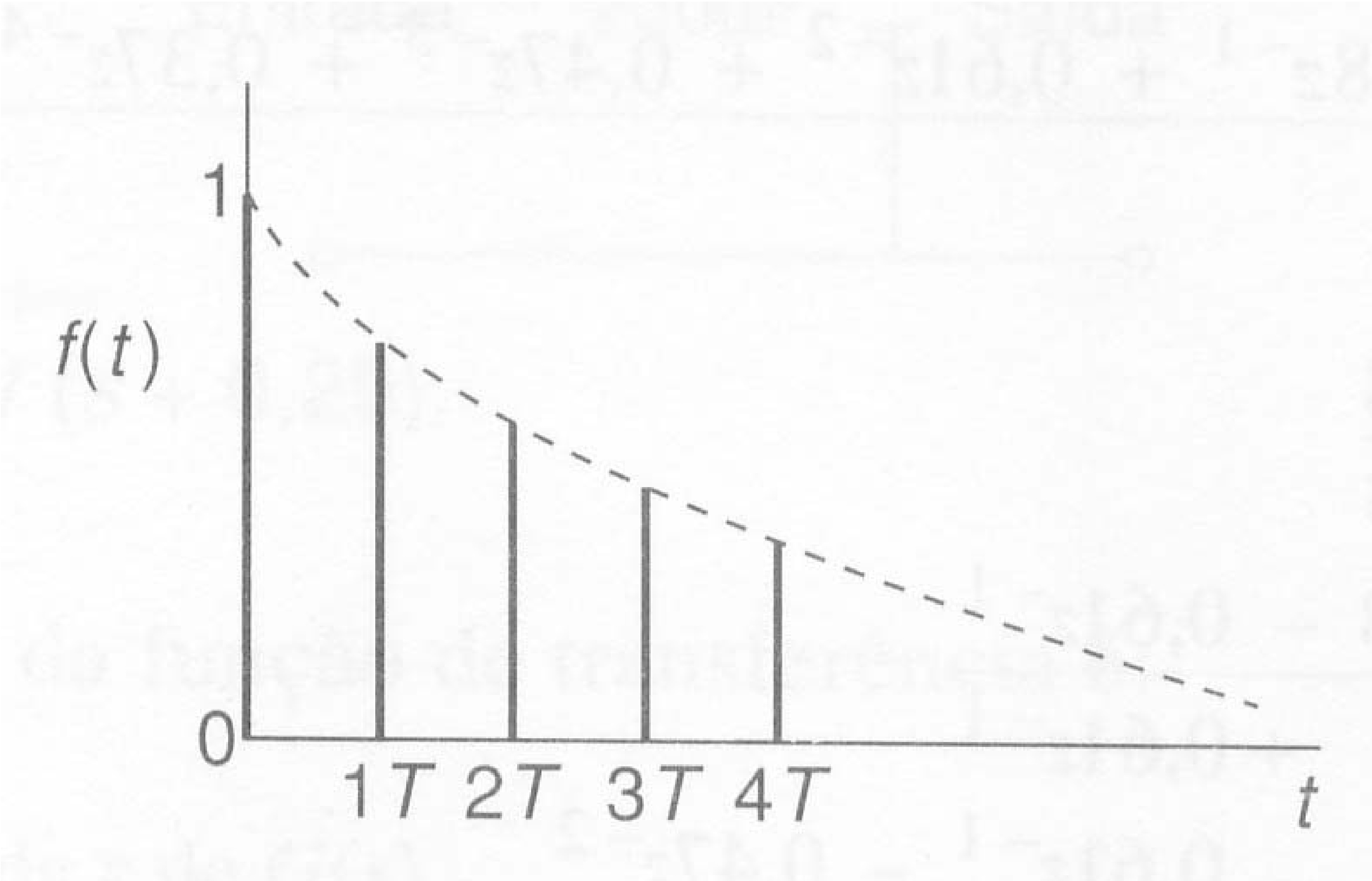
$$F(z) = saída = \frac{z}{z-0,78}$$

$$(z-1)F(z) = \frac{(z-1)z}{z-0,78}$$

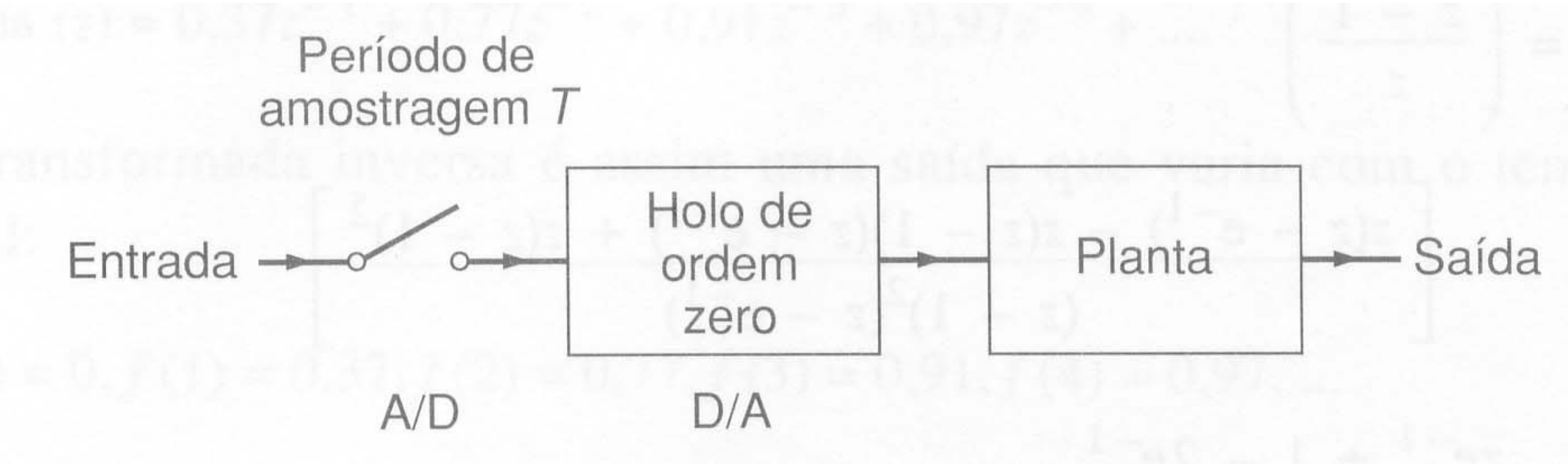
Quando $z \to 1$, a expressão tende a zero. Portanto:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

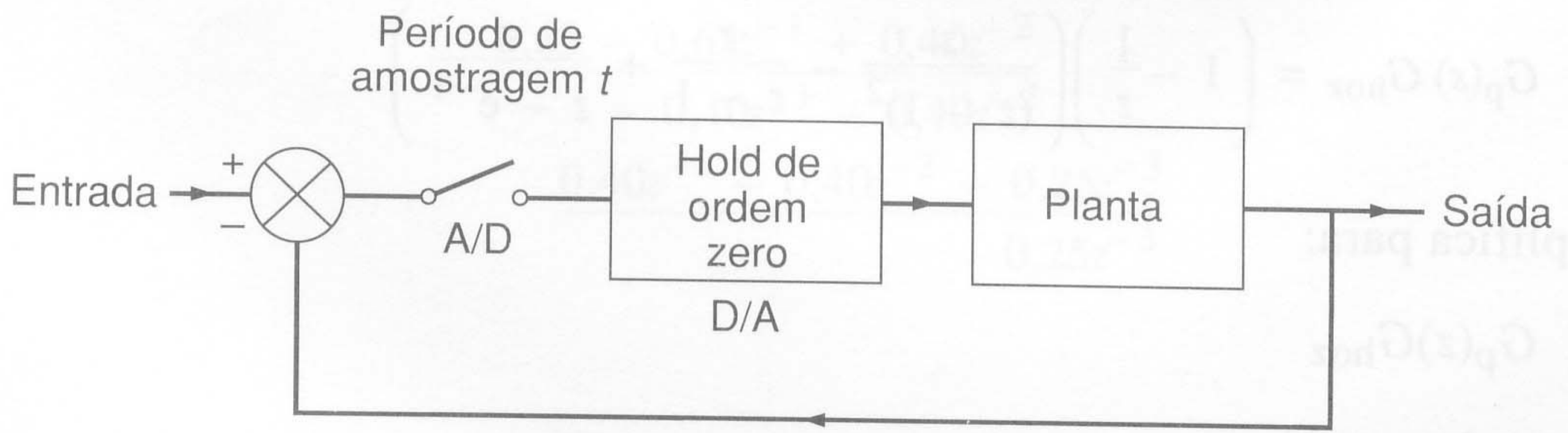
As amplitudes dos pulsos diminuem até zero.



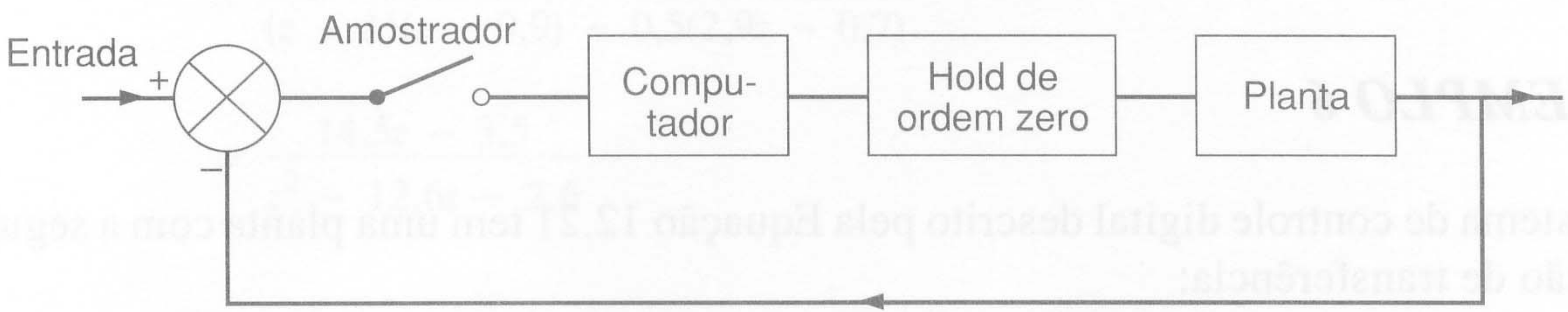
Sistema de dados amostrados em malha aberta



Sistema de dados amostrados em malha fechada



Sistema de dados amostrados controlado por computador



FIM