MODELOS DE SISTEMAS

Modelos matemáticos

Leis físicas fundamentais

- Equações de conservação
- Equações constitutivas

Sistemas

- Mecânicos
- Elétricos
- Térmicos
- Fluidos

Equações de Conservação

Conservação da quantidade de movimento linear

$$\sum F = \frac{d}{dt}\left[mv\right] \qquad \text{para } m\text{=const.} \qquad \sum F - m\frac{dv}{dt} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento angular

$$\sum T = \frac{d}{dt}\left[J\omega\right] \qquad \sum T - J\frac{d\omega}{dt} = 0$$

Equações de Conservação

Conservação da carga elétrica (Lei de Kirchoff)

$$\sum i_{nó} = \frac{dQ}{dt} = C\frac{de}{dt}$$

$$\sum i_{nó} - C\frac{de}{dt} = 0$$

Conservação da massa

$$\sum \dot{m} = \frac{d}{dt}\left[\rho V\right] = \rho\dot{V} + V\dot{\rho}$$

$$\sum \dot{m} - \frac{d}{dt}\left[\rho V\right] = 0$$

Equações de Conservação

Conservação da energia

$$\frac{d}{dt}\left[mu+\frac{mV^2}{2}+mz\right]_{vc}=\dot{Q}_{vc}-\dot{W}_{vc}+\sum\dot{m}_e\left(h_e+\frac{V_e^2}{2}+gZ_e\right)-\sum\dot{m}_s\left(h_s+\frac{V_s^2}{2}+gZ_s\right)$$

Equação de Bernoulli

$$\frac{P}{\rho}+\frac{V^2}{2}+Zg=constante$$

sem troca de calor,
trabalho ou
armazenamento
de energia

Equações Constitutivas

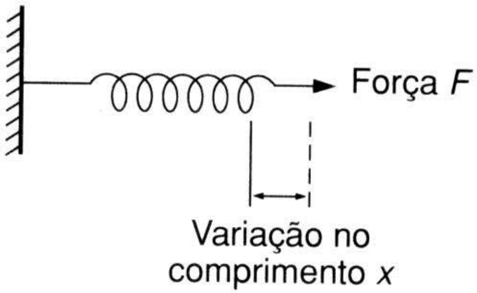
Leis físicas fundamentais que regem o comportamento de um elemento de um sistema

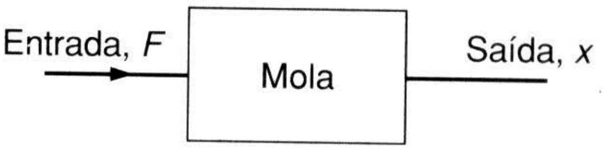
Exemplos

- Massa
- Mola
- Amortecedor

- Resistor
- Capacitor
- Indutor

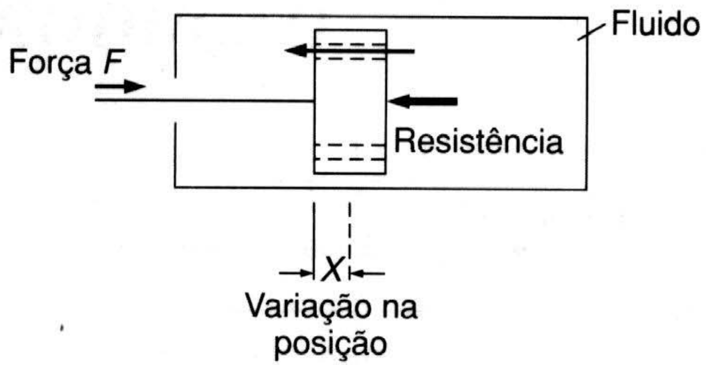
Sistemas Mecânicos Mola

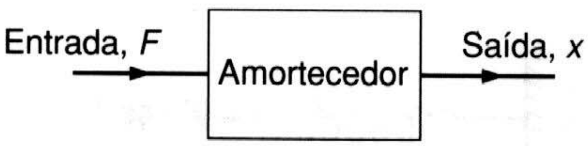




$$F = k\,x$$

Sistemas Mecânicos Amortecedor

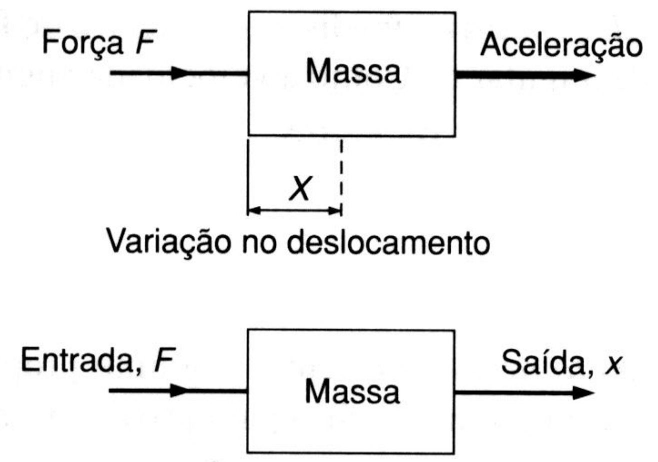




$$F = c\,v$$

$$F = c\frac{dx}{dt}$$

Sistemas Mecânicos Massa



$$F = m\,a$$

$$F = m\,a = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d\left(dx/dt\right)}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Sistemas Mecânicos em Rotação

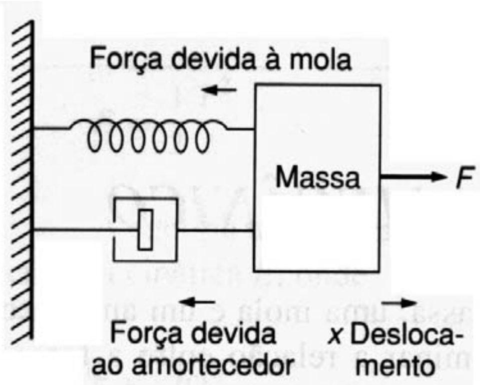
Mola torcional $$T = k\theta$$

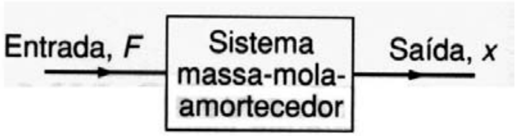
Amortecedor rotativo $$T = c\omega = c\frac{d\theta}{dt}$$

Inércia

$$T = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d\left(d\theta/dt\right)}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Construindo um Modelo para um Sistema Mecânico





Conservação da quantidade de movimento linear

$$\sum F_e = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Somatório de forças aplicadas à massa *m*

$$\sum F_e = F - F_{mola} - F_{amortecedor}$$

$$\sum F_e = F - kx - cv$$

$$F - kx - cv = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

Freqüência angular natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Razão de amortecimento

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{(mk)}}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{dx}{dt} + x = \frac{F}{k}$$

Sistemas Mecânicos de Rotação

$$T - k\theta - c\omega = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T$$

Freqüência angular natural

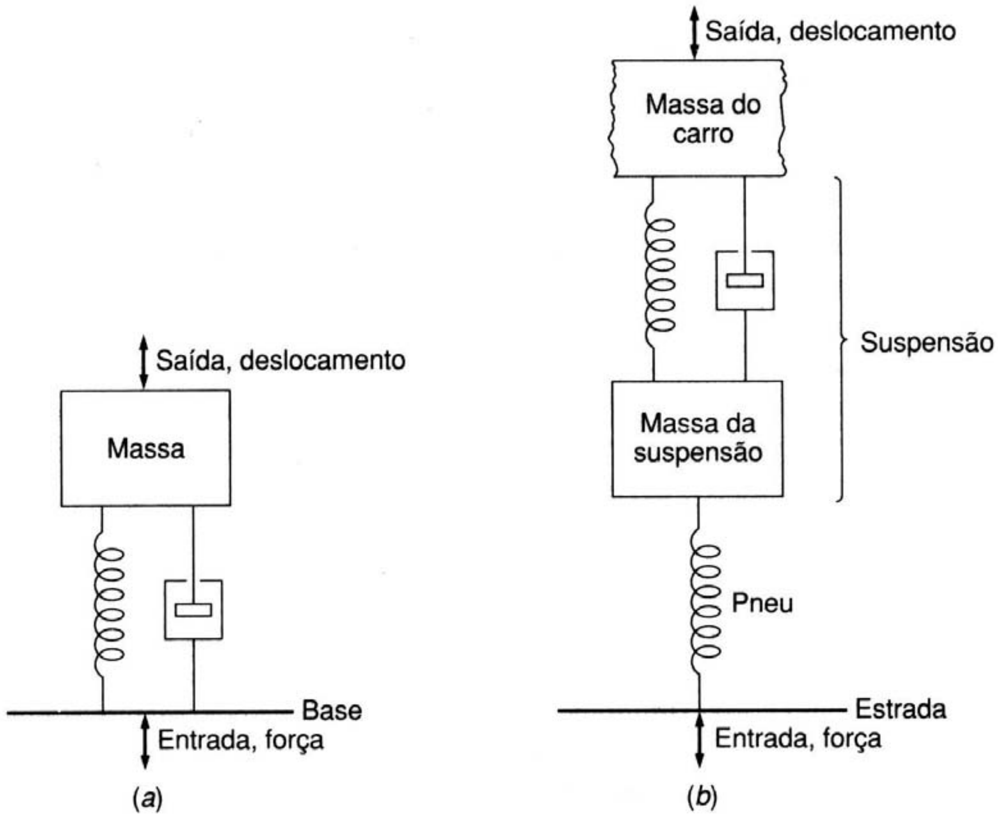
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}}$$

Razão de amortecimento

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{(Jk)}}$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{T}{k}$$

Exemplos de Sistemas Mecânicos



Exemplos de modelos mecânicos: (*a*) uma máquina montada no chão e (*b*) o volante de um carro ou caminhão movendo-se ao longo de uma estrada.

Exemplos de Sistemas Mecânicos

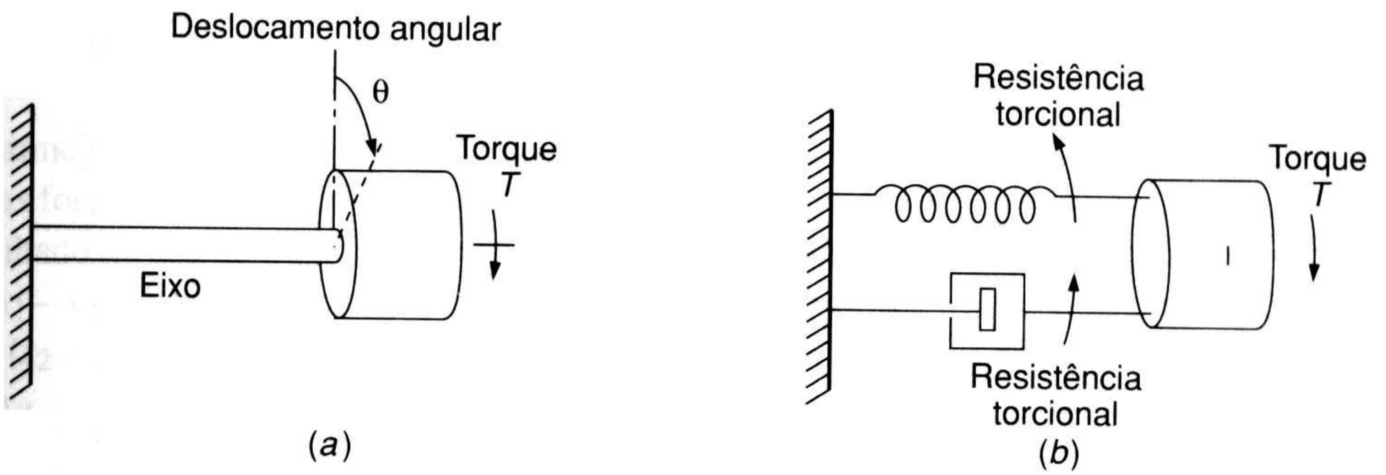
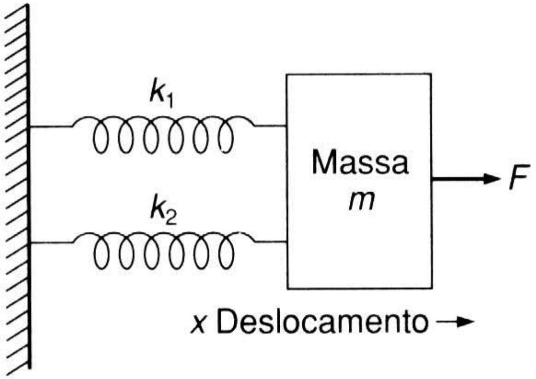


Figura 2.6 (a) Girando uma massa em uma extremidade de um eixo e (b) o modelo em bloco.

Exemplo 1

Determinar a equação diferencial descrevendo as relações entre a entrada da força e a saída de deslocamento x para o sistema mostrado na Figura



$$Somatório\ de\ forças = F - k_1 x - k_2 x \qquad Somatório\ de\ forças = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

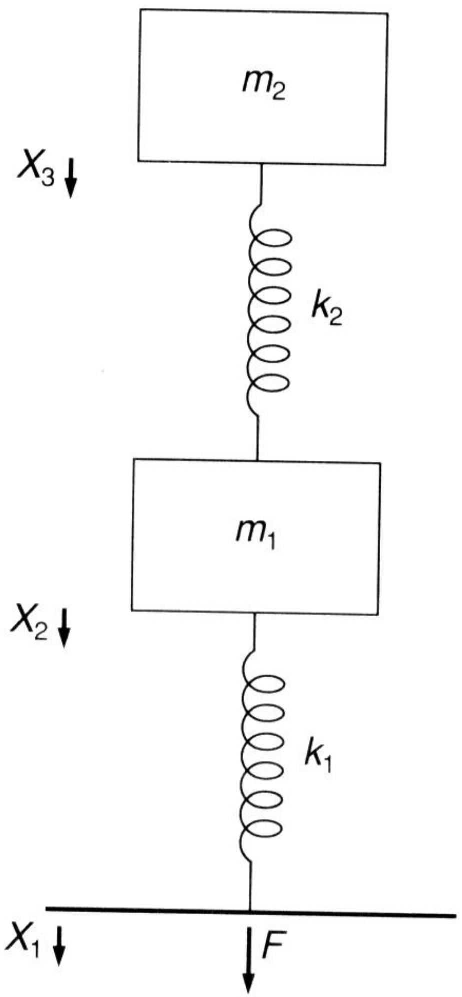
Portanto:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - k_1 x - k_2 x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = F$$

Exemplo 2

Determinar a equação diferencial que descreve o movimento da massa m_1 na Figura quando a força F é aplicada.



$$Somatório\ de\ forças = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2)$$

Este somatório de forças provoca uma Aceleração na massa. Assim

$$m_1 \frac{d^2 x_2}{dt} = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2)$$

A força que causa a distensão na mola inferior é F

$$F = k_1(x_2 - x_1)$$

$$m_1 \frac{d^2 x_2}{dt} + k_2(x_3 - x_2) = F$$

$$m_2 \frac{d^2 x_3}{dt} + k_2(x_3 - x_2) = 0$$

Exemplo de Sistema Mecânico

Suspensão de automóvel

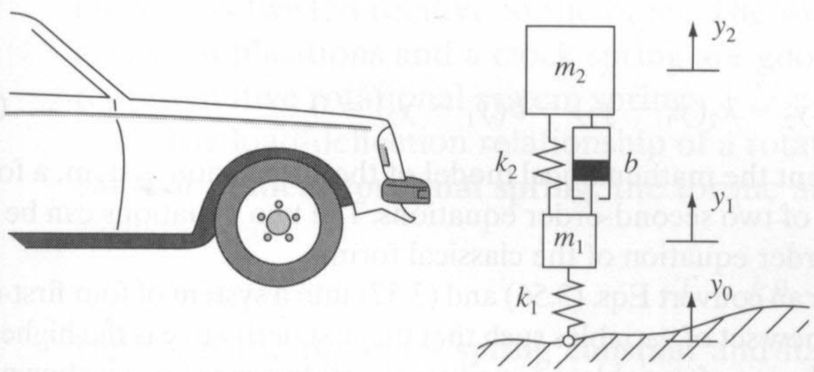


Figure 3.15 Auto front end and model.

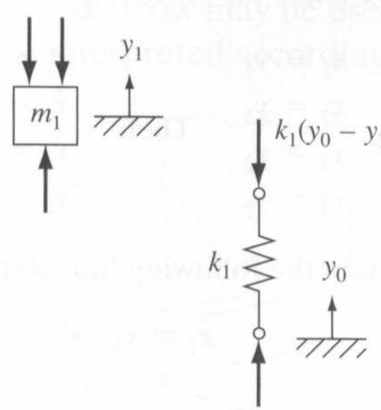


Figure 3.16 Free-body diagram of m_1.

Exercício p/ próxima aula:

Formulação matemática do exemplo.(Eq. Diferencial)

Exemplo de Sistema Mecânico

Suspensão de automóvel

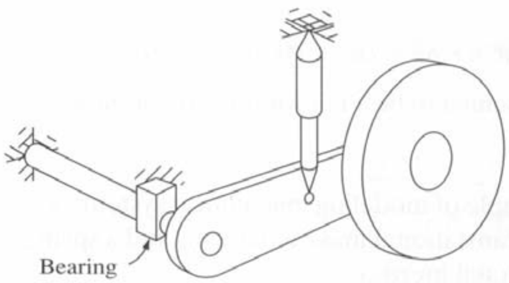


Figure 3.27 Automotive suspension system.

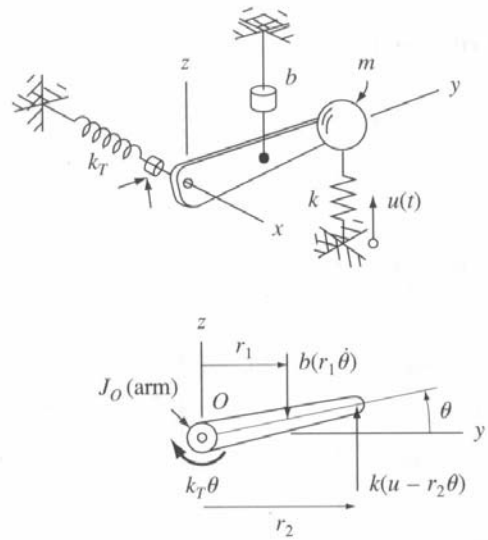


Figure 3.28 Suspension schematic and free-body diagram.