Sistemas Elétricos

Indutor

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$$

Capacitor

$$v = \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = \int i\,dt$$

$$v = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Sistemas Elétricos

Resistor $v = R\,i$

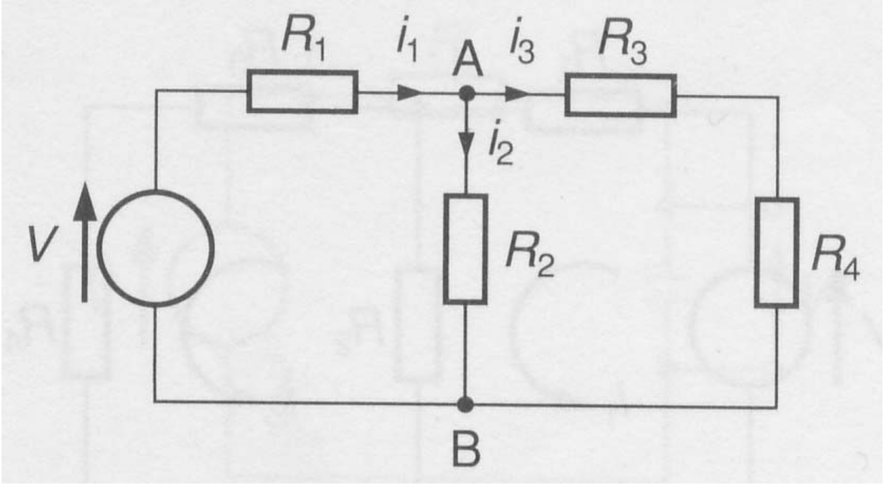
Bloco	Equação (a)	Equação (b)
Armazenamento de energia		
Indutor	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$i = \dfrac{1}{L}\int v\,dt$
Capacitor	$v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
Dissipação de energia		
Resistor	$v = R\,i$	$i = \dfrac{v}{R}$

Construindo um Modelo para um Sistema Elétrico

Conservação da carga elétrica

Leis de Kirchoff

- 1ª lei: A soma algébrica das correntes nos nós é zero.
- 2ª lei: Em um circuito fechado, a soma algébrica das diferenças de potencial em cada elemento é igual à força eletromotriz aplicada.



Primeira Lei de Kirchoff

$$i_1 = i_2 + i_3$$

A corrente que passa por R_1 é i_1, e a tensão neste resistor é (v-v_A); assim

$$i_1 R_1 = v - v_A$$

A corrente em R_2 é i_2; e como a diferença de potencial em R_2 é v_A; então

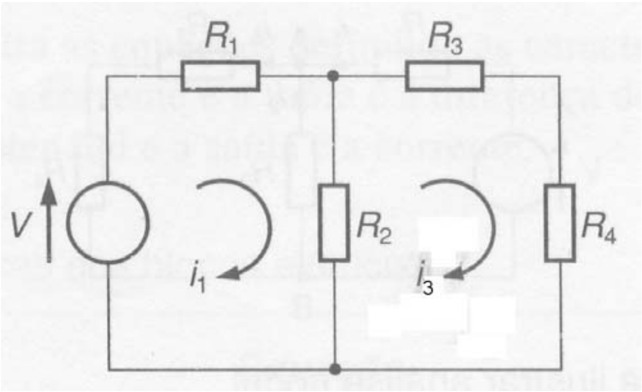
$$i_2 R_2 = v_A$$

A corrente i_3 passa em R_3 em série com R_4 e existe uma diferença de potencial v_A sobre a combinação. Assim:

$$i_3 \left(R_3 + R_4 \right) = v_A$$

Equacionando as correntes, temos:

$$\frac{v - v_A}{R_1} = \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A}{R_3 + R_4}$$



Segunda Lei de Kirchoff

$$\sum v = 0$$

Para a malha com corrente i_1 circulando, se a corrente em R_1 é i_1 e em R_2 é (i_1 - i_3);

$$v = i_1 R_1 + (i_1 - i_3) R_2 \qquad \text{(a)}$$

$$v = i_1 (R_1 + R_2) - i_3 R_2$$

Para a malha com corrente i_3 circulando, já que não existe nenhuma fem:

$$0 = i_3 R_3 + i_3 R_4 + (i_3 - i_1) R_2$$

Rearranjando temos

$$i_3 (R_3 + R_4 + R_2) = i_1 R_2$$

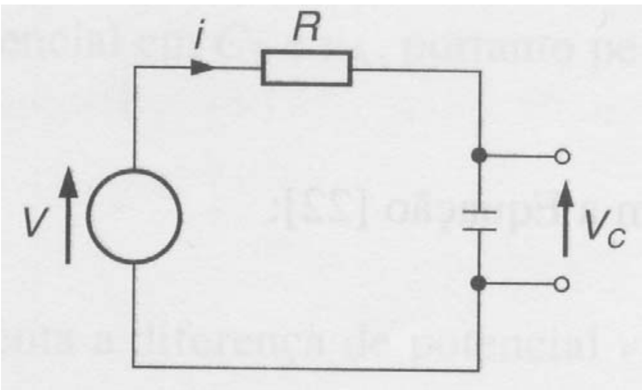
Substituindo i_3 na equação (a)

$$v = i_1(R_1 + R_2) - \frac{i_1 R_2^2}{R_3 + R_4 + R_2}$$

$$v = \frac{i_1(R_1R_3 + R_1R_4 + R_1R_2 + R_2R_3 + R_2R_4)}{R_3 + R_4 + R_2}$$

Em geral, quando o número de nós é menor que o número de malhas, é mais fácil usar a análise nodal

SISTEMA ELÉTRICO SIMPLES



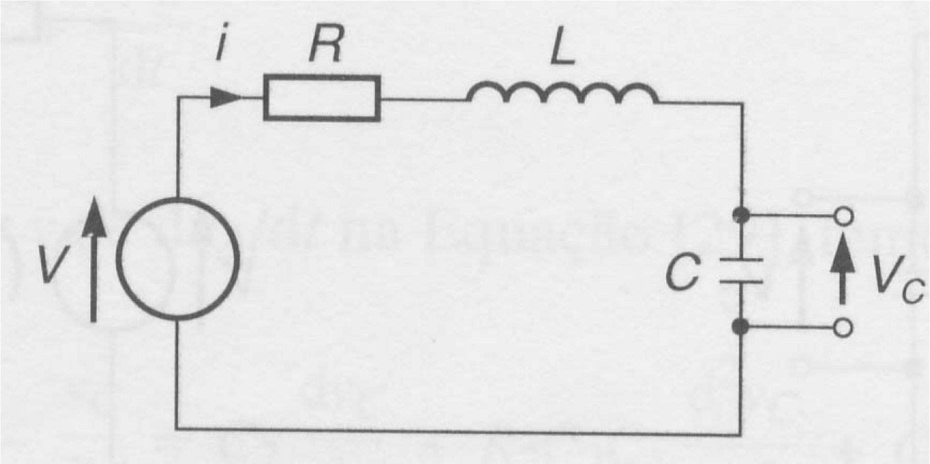
Sistema resistor-capacitor

$$v = v_R + v_C \qquad v_R = iR$$

$$v = iR + v_C \qquad i = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$v = RC\frac{dv_c}{dt} + v_C$$

Dá a relação entre a saída v_c e a entrada v



Sistema resistor-indutor-capacitor

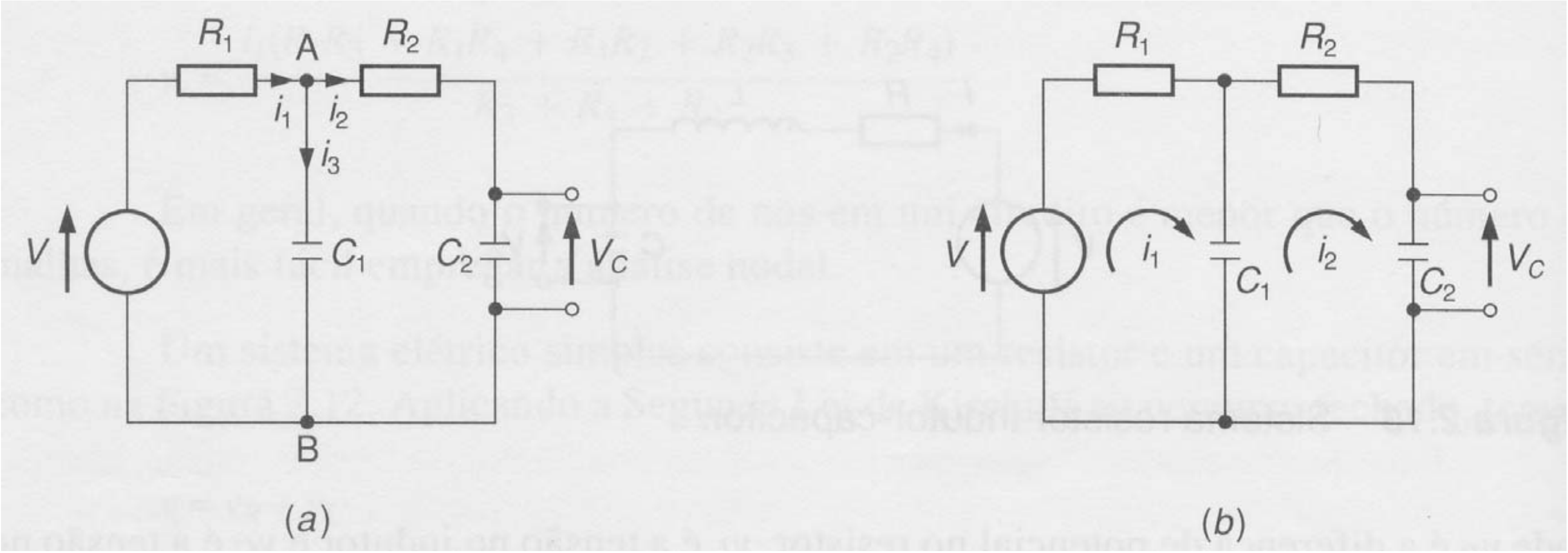
$$v = v_R + v_L + v_C$$

$$v = iR + L\frac{di}{dt} + v_C$$

mas $$i = C\frac{dv_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = C\frac{d\left(dv_C/dt\right)}{dt} = C\frac{d^2 v_C}{dt^2}$$

portanto

$$v = RC\frac{dv_c}{dt} + LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C$$



Sistema elétrico com duas malhas

(a) Análise nodal

$$i_1 R_1 = v - v_A \qquad i_3 = C_1 \frac{dv_A}{dt} \qquad i_2 = C_2 \frac{dv_C}{dt}$$

No nó A $\quad i_1 = i_2 + i_3$

$$\frac{v - v_A}{R_1} = C_2 \frac{dv_C}{dt} + C_1 \frac{dv_A}{dt} \qquad \text{(b)}$$

A diferença de potencial na combinação de R_2 e C_2 é v_A, então:

$$v_A = i_2 R_2 + v_C \qquad \Rightarrow \; v_A = R_2 C_2 \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

$$\frac{dv_A}{dt} = R_2 C_2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{dv_C}{dt}$$

Substituindo v_A e dv_A/dt na equação (b)

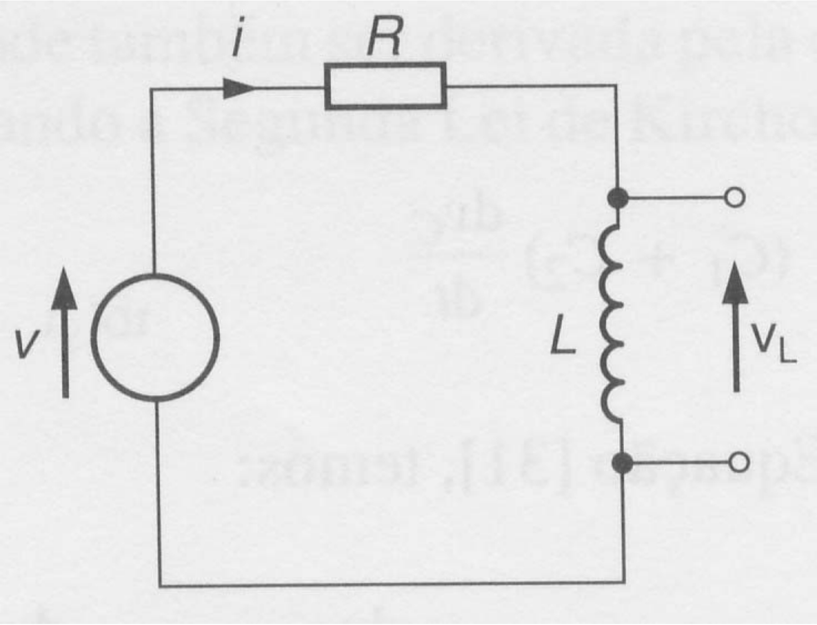
$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) \frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{v}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

(b) Análise de malha

Resolver para a próxima aula

Exemplo:

Determinar a relação entre a saída, a diferença de potencial no indutor v_L, e a entrada *v* para o circuito mostrado na figura



$$v = v_R + v_L$$

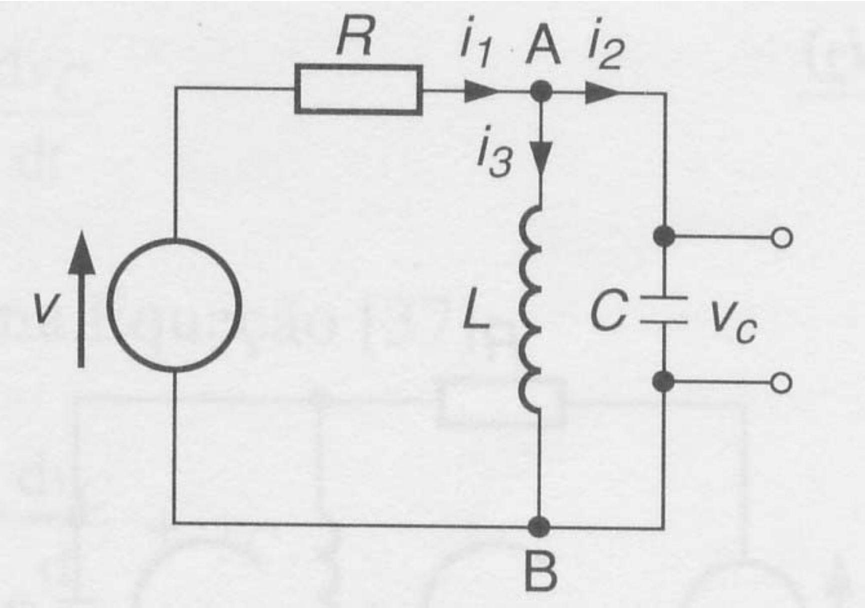
$$v = iR + v_L$$

No Indutor

$$i = \frac{1}{L}\int v_L dt$$

$$v = \frac{R}{L}\int v_L dt + v_L$$

Exercício para a próxima aula:
Determinar a relação entre a saída, a diferença de potencial no capacitor v_C e a entrada v para o circuito mostrado na figura



A solução pose ser obtida tanto pela análise nodal quanto pela análise de malha.

Este exercícios terão peso importante na avaliação final

Analogia de Sistemas Mecânicos com Sistemas Elétricos

Resistor $i = \dfrac{v}{R}$

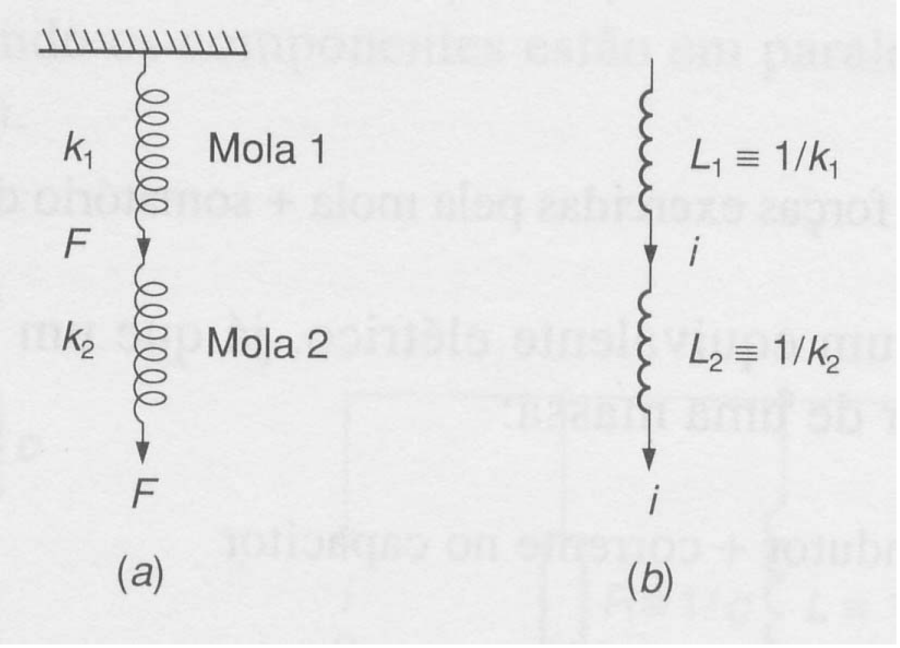
Amortecedor $F = cv$

Grandezas análogas:

- Corrente $\Leftrightarrow$ Força
- Diferença de potencial $\Leftrightarrow$ Velocidade
- Constante de amortecimento *c* $\Leftrightarrow$ Inverso da resistência *1/R*

Bloco	Equação	Const. Análoga
Armazenamento de energia		
Indutor	$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$	$\frac{1}{L}$
Mola translacional	$F = kx = k\int v\,dt$	k
Mola torcional	$T = k\theta = k\int \omega\,dt$	k
Capacitor	$i = C\frac{dv}{dt}$	C
Massa	$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv}{dt}$	m
Momento de inércia	$T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = J\frac{d\omega}{dt}$	J
Dissipação de energia		
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$\frac{1}{R}$
Amortecedor translacional	$F = cv$	c
Amortecedor rotacional	$T = c\omega$	c

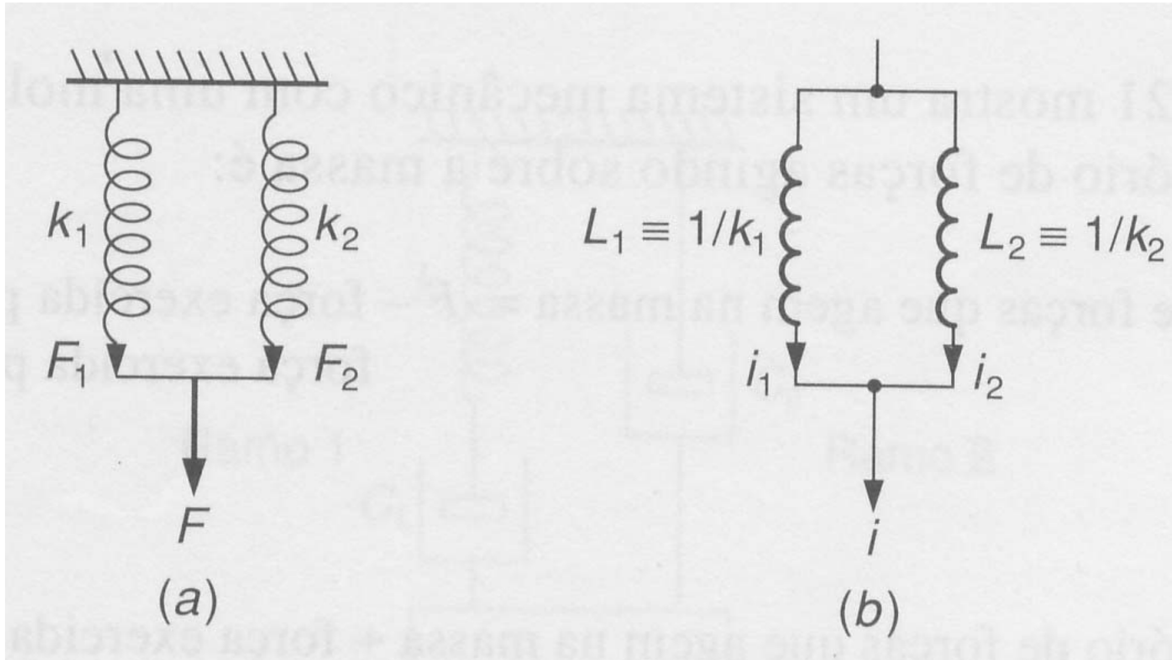
Considere a analogia elétrica para duas molas em série



Sistema mecânico (molas) $F_1 = F_2$

Equivalente elétrico $i_1 = i_2$

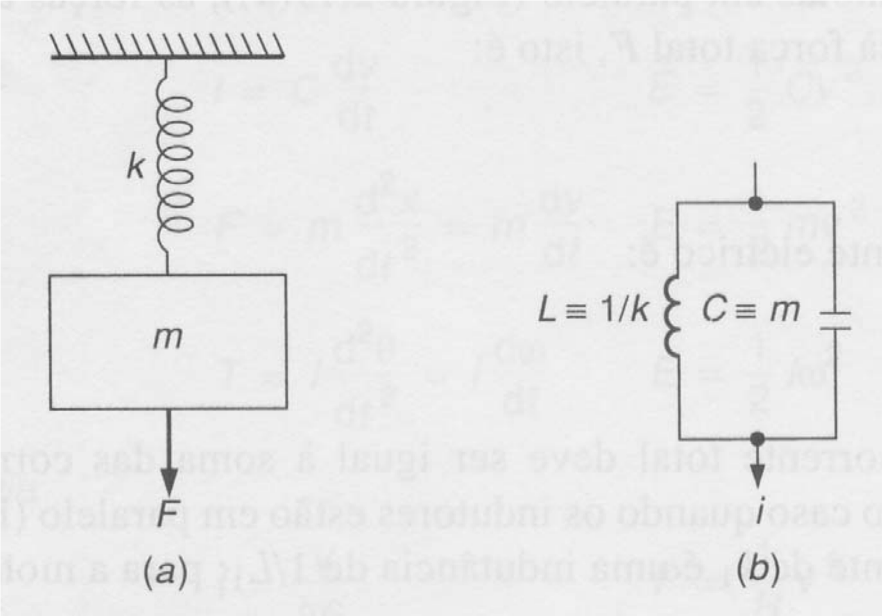
Considere a analogia elétrica para duas molas em paralelo



Sistema mecânico (molas) $F = F_1 + F_2$

Equivalente elétrico $i = i_1 + i_2$

Sistema envolvendo uma mola e uma massa



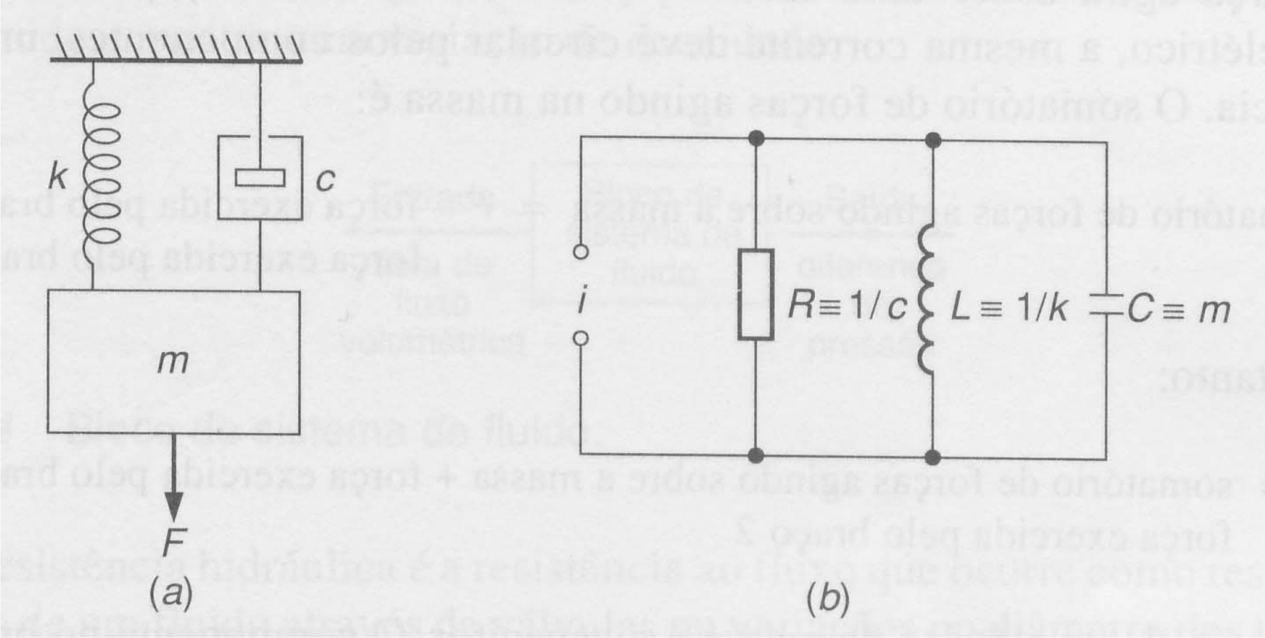
Sistema mecânico

$$F = \sum Forças\ exercidas\ pela\ mola + \sum Forças\ que\ agem\ na\ massa$$

Equivalente elétrico

$$i = Corrente\ no\ indutor + Corrente\ no\ capacitor$$

Sistema envolvendo uma mola, um amortecedor e uma massa



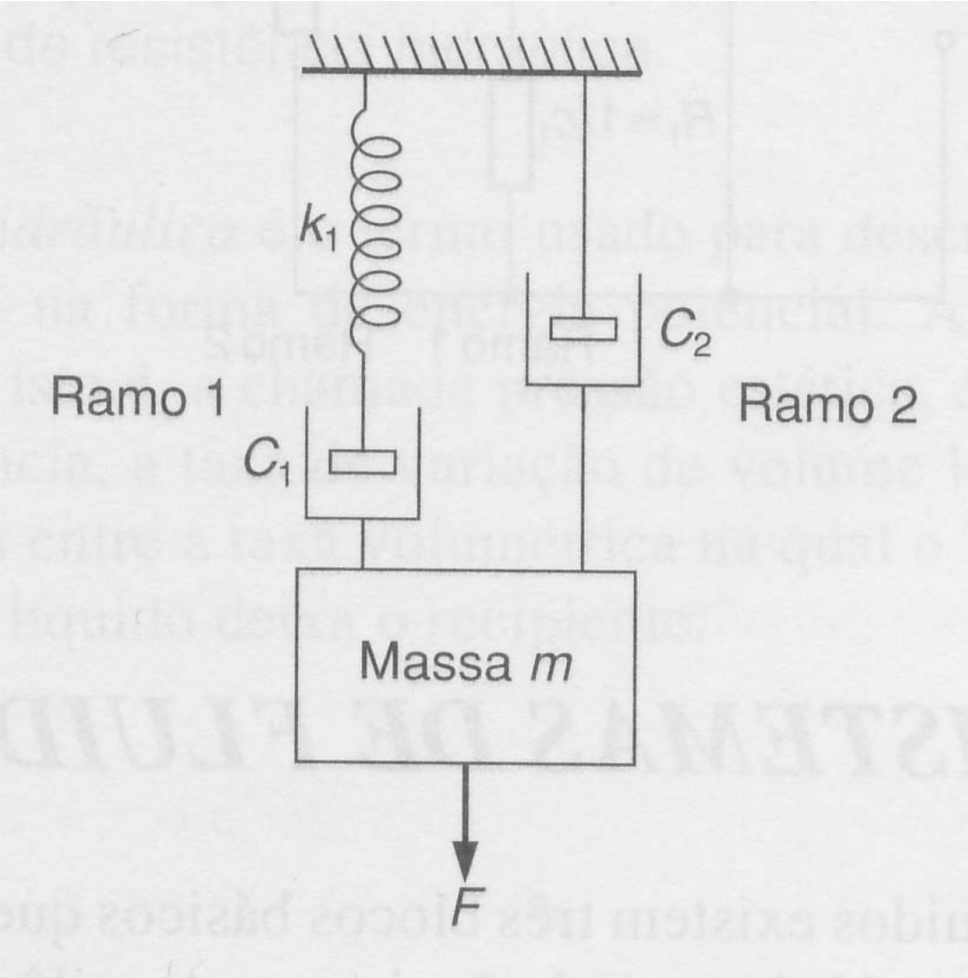
Sistema mecânico

$$F = \sum Forças\ exercidas\ pela\ mola + \sum Forças\ que\ agem\ na\ massa + Força\ exercida\ pelo\ amortecedor$$

Equivalente elétrico

$$i = Corrente\ no\ indutor + Corrente\ no\ capacitor + Corrente\ no\ resistor$$

Exercício para a próxima aula:
Desenhar um circuito elétrico análogo ao sistema mostrado na Figura



Este exercícios terão peso importante na avaliação final