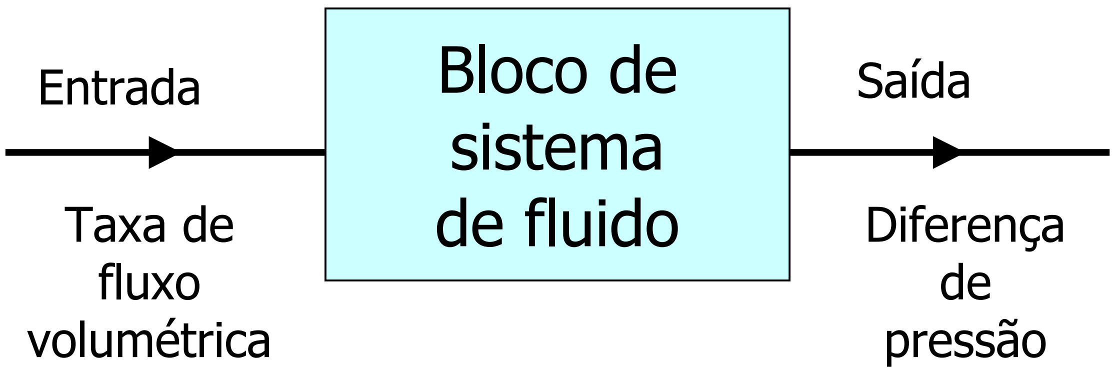
SISTEMAS DE FLUIDOS

Representação de um sistema de fluido



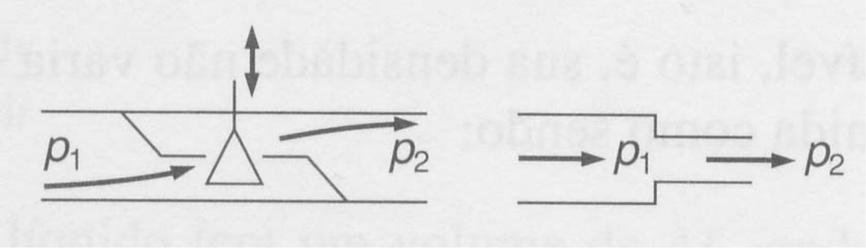
Sistemas de fluidos
- Hidráulicos
- Pneumáticos

SISTEMAS HIDRÁULICOS

Elementos dos sistemas hidráulicos

- Resistência Hidráulica
- Armazenamento
  - *Acumulo de fluido*
  - *Capacitância hidráulica*
- Inércia hidráulica

RESISTÊNCIA HIDRÁULICA



$$p_1 - p_2 = Rq \qquad\qquad q = \vec{V}A$$

Para um tubo $\rightarrow$ Equação de Darcy

$$\Delta p = f\,\frac{L}{d}\,\frac{\vec{V}^2}{2g}\,\gamma$$

Para escoamento laminar

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64\,\nu}{\vec{V}.d}$$

$$\Delta p = 64\,\nu \frac{L}{d^2} \frac{\vec{V}}{2g} \gamma$$

$$\Delta p = \frac{32\mu.L}{d^2} \vec{V}$$

$$q = \vec{V}.A$$

$$\vec{V} = \frac{d^2}{32.\mu.L} \Delta p$$

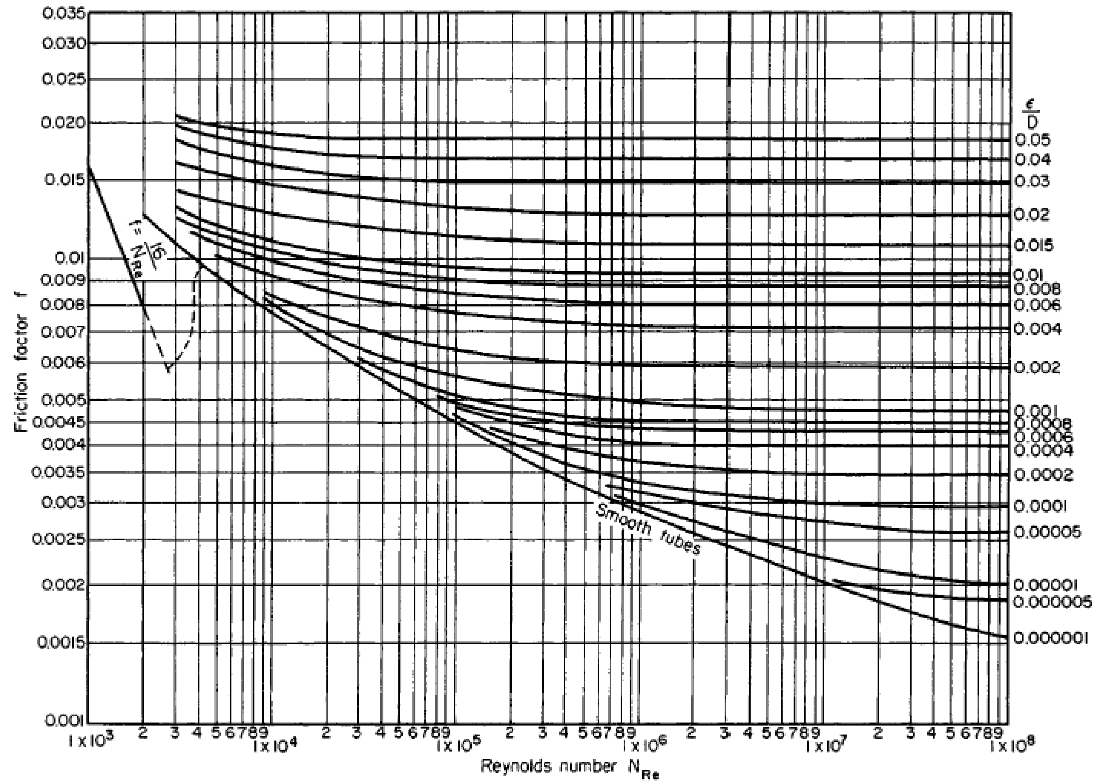
$$q = \frac{\pi.d^4}{128.\mu.L} \Delta p$$

Portanto a relação entre *p* e *q* é linear para o escoamento laminar

Para escoamento turbulento

$$\Delta p = f \frac{L}{d}\frac{\vec{V}^2}{2g}\gamma$$

f é obtido do diagrama de Moody



A relação entre *p* e *q* é não linear para o escoamento turbulento

f varia com o número de Reynolds de forma não linear, e depende da rugosidade do tubo

- Para tubos lisos

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0{,}86 \ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{f}\right) - 0{,}8$$

ou a fórmula de Blasius

$$f = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}^{1/4}}$$

- Para tubos rugosos

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$$

- Para tubos comerciais entre a região hidraulicamente lisa e hidraulicamente rugosa

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}86 \ln\left(\frac{\varepsilon/d}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}.\sqrt{f}}\right)$$

A relação entre q e Δp é não linear

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{2.d}{f.L.\rho}}.\sqrt{\Delta p}$$

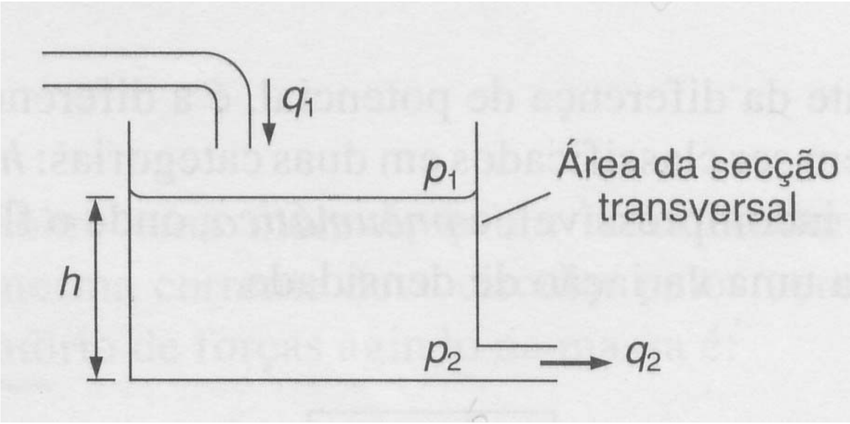
Em válvulas e acessórios

$$\Delta p = K\frac{\vec{V}^2}{2}\rho \qquad \bar{V} = \sqrt{\frac{2}{K.\rho}}.\sqrt{\Delta p} \qquad q = A\sqrt{\frac{2}{K.\rho}}.\sqrt{\Delta p}$$

Para contornar o problema das relações não lineares, vamos linearizá-las próximo ao ponto de operação, de modo a permitir expressá-las na forma linear como:

$$q = \frac{p_1 - p_2}{R}$$

Capacitância hidráulica



$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt}$$

mas $V = Ah$

$$q_1 - q_2 = \frac{d(Ah)}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

A diferença de pressão entre entrada e saída

$$p_1 = p_{atm}$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h$$

$$\Rightarrow$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h \equiv p$$

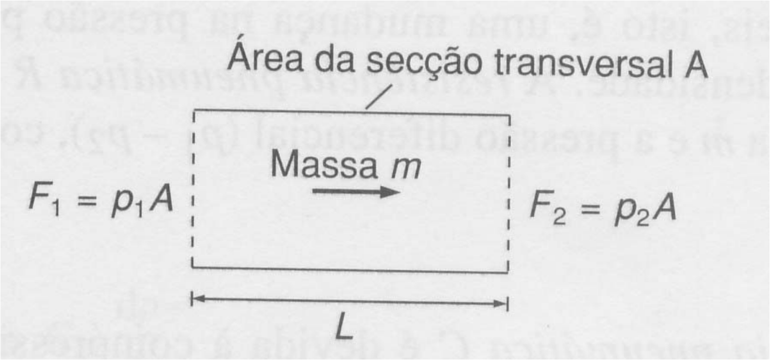
$$q_1 - q_2 = A\frac{d(p/\rho g)}{dt} = \frac{A}{\rho g}\frac{dp}{dt}$$

Líquido incompressível

$$C = \frac{A}{\rho g} \qquad \Rightarrow \qquad q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt}$$

Integrando $$p = \frac{1}{C}\int\left(q_1 - q_2\right)dt$$

Inércia hidráulica



Para acelerar um fluido e aumentar sua velocidade é necessário uma Força

Força $$F_1 - F_2 = p_1 A - p_2 A = \left(p_1 - p_2\right) A$$

2ª lei de Newton $$\sum F = ma$$

$$(p_1 - p_2) A = ma = m \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$(p_1 - p_2)A = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

A massa de líquido tem volume $= AL$ $m = AL\rho$

$$(p_1 - p_2)A = AL\rho\frac{d\vec{V}}{dt}$$ $$q = A\vec{V}$$

$$(p_1 - p_2)A = L\rho\frac{dq}{dt}$$ $$(p_1 - p_2) = I\frac{dq}{dt}$$

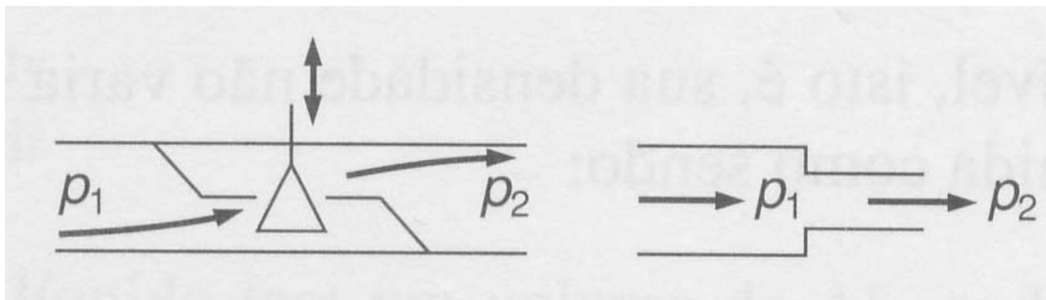
onde $I = \frac{L\rho}{A}$ = Inércia hidráulica

SISTEMAS PNEUMÁTICOS

Elementos básicos dos sistemas pneumáticos

- Resistência pneumática
- Armazenamento
  - *Acumulo de fluido*
  - *Capacitância pneumática*
- Inércia

RESISTÊNCIA PNEUMÁTICA



$$p_1 - p_2 = R\dot{m}$$

Capacitância pneumática

Taxa de variação de massa no recipiente $= \dot{m}_1 - \dot{m}_2$

Taxa de variação de massa no recipiente $= \dfrac{d(\rho V)}{dt}$

Taxa de variação de massa no recipiente $= \rho \dfrac{dV}{dt} + V \dfrac{d\rho}{dt}$

Gás ideal $pV = mRT$

Taxa de variação de massa no recipiente $= \rho \dfrac{dV}{dp} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{V}{RT} \dfrac{dp}{dt}$

Taxa de variação de massa no recipiente $= \rho \frac{dV}{dp}\frac{dp}{dt} + \frac{V}{RT}\frac{dp}{dt}$

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \left(\rho \frac{dV}{dp} + \frac{V}{RT} \right) \frac{dp}{dt}$$

Capacitância pneumática devido a variação do volume $\Rightarrow$ $C_1 = \rho \frac{dV}{dp}$

Capacitância pneumática devido a compressibilidade do gás $\Rightarrow$ $C_2 = \frac{V}{RT}$

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\frac{dp}{dt}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{(C_1 + C_2)} \int (\dot{m}_1 - \dot{m}_2) dt$$

Inércia pneumática

$$\sum F = ma = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$

$$(p_1 - p_2)A = \frac{d\left(m\vec{V}\right)}{dt}$$

$$m\vec{V} = \rho LA\left(\frac{q}{A}\right) = \rho Lq$$

$$(p_1 - p_2)A = L\frac{d(\rho q)}{dt}$$

$$\dot{m} = \rho q$$

$$(p_1 - p_2) = \frac{L}{A}\frac{d\dot{m}}{dt}$$

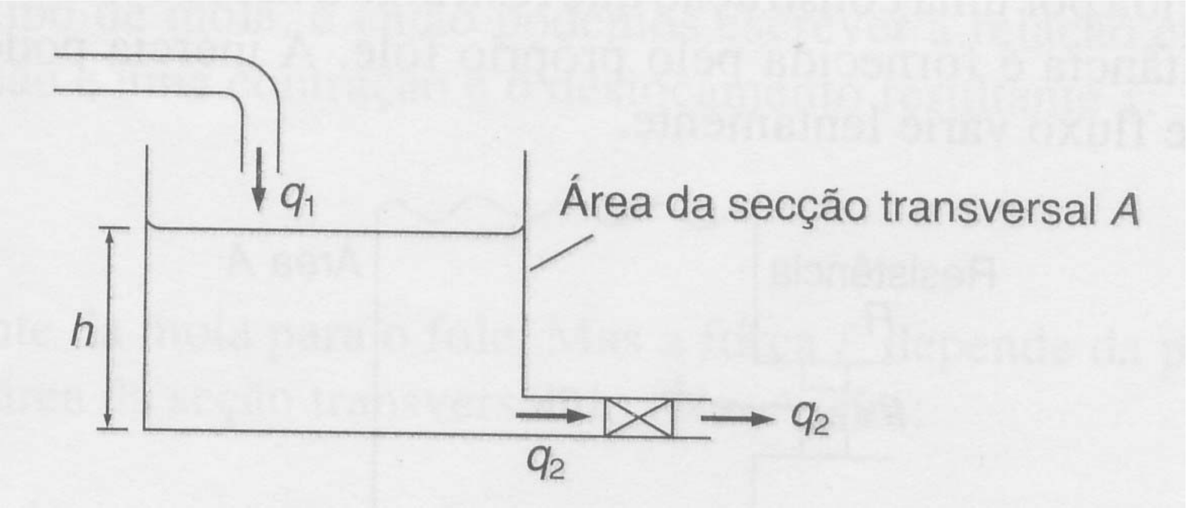
$$(p_1 - p_2) = I\frac{d\dot{m}}{dt}$$

Inércia pneumática

$$I = \frac{L}{A}$$

Bloco	Equação	Const. Análoga
Armazenamento de energia		
Inércia hidráulica	$q = \frac{1}{I}\int (p_1 - p_2)\,dt$	$\frac{1}{I} = \frac{A}{\rho L}$
Inércia pneumática	$\dot{m} = \frac{1}{I}\int (p_1 - p_2)\,dt$	$\frac{1}{I} = \frac{A}{L}$
Capacitância hidráulica	$q = C\frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$C = A/\rho g$
Capacitância pneumática	$\dot{m} = C\frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$C = \rho\frac{dV}{dt} + \frac{V}{RT}$
Dissipação de energia		
Resistência hidráulica	$q = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$\frac{1}{R}$
Resistência pneumática	$\dot{m} = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$\frac{1}{R}$

Construindo um Modelo para um Sistema de Fluidos



$$q_1 - q_2 = C\frac{dp}{dt} \qquad \text{(a)}$$

A razão q_2 na qual o líquido passa pela válvula é

$$p = Rq_2 = \rho g h$$

A pressão deve-se a altura de líquido no recipiente.
Substituindo q_2 na eq. (a)

$$q_1 - \frac{p}{R} = C\frac{dp}{dt}$$

Se $p = \rho g h$

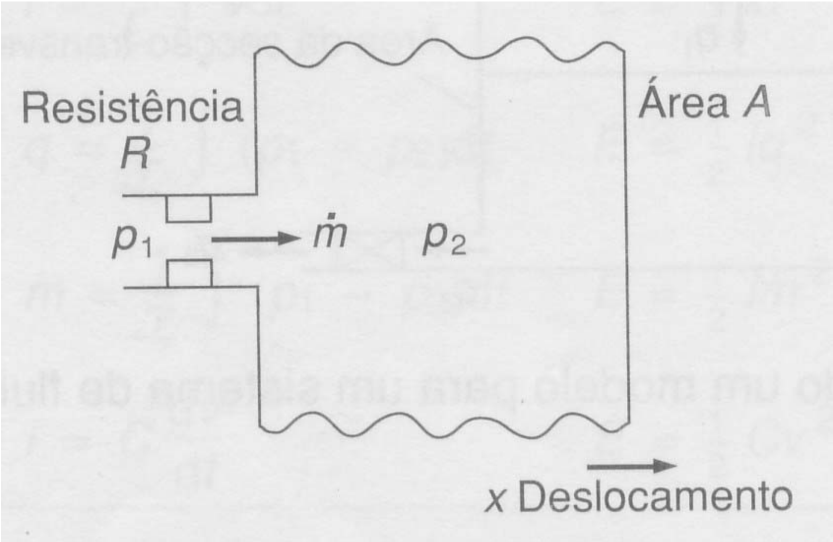
$$q_1 - \frac{h\rho g}{R} = C\frac{d(h\rho g)}{dt}$$

Se $C = A/\rho g$

$$q_1 = A\frac{dh}{dt} + \frac{h\rho g}{R}$$

Essa equação mostra como a altura de um líquido em um recipiente depende da taxa de entrada do líquido no recipiente

Sistema Pneumático



A taxa de fluxo de massa $\dot{m}$ para dentro do fole é:

$$\dot{m} = \frac{p_1 - p_2}{R} \qquad \text{(b)}$$

Todo gás que entra no fole permanece lá, não há escape

A capacitância do fole é dada por:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt}$$

Como $\dot{m}_1$ é dado pela eq. (b) e $\dot{m}_2 = 0$

$$\frac{p_1 - p_2}{R} = (C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt}$$

$$p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{dp_2}{dt} + p_2 \qquad \text{(c)}$$

O fole expande ou contrai como resultado da variação de pressão dentro dele. Os foles são um tipo de mola.

$$F = k.x$$

$$p_2.A = F = k.x$$

Substituindo p_2 na eq. (c)

$$p_1 = R(C_1 + C_2)\frac{k}{A}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{A}x$$

Essa equação descreve como a expansão ou a contração do fole varia com o tempo quando ele é submetido a uma pressão de entrada p_1

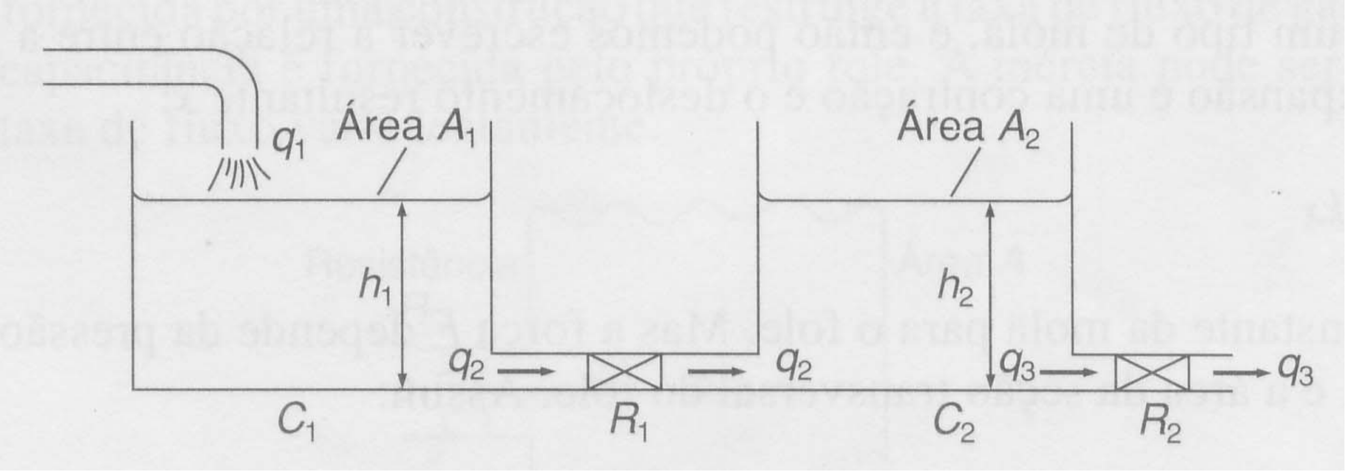
$$C_1 = \rho \frac{dV}{dp_2} \qquad V = Ax \qquad C_1 = \rho A \frac{dx}{dp_2}$$

Para o fole $\quad p_2 A = k.x$

Assim $\quad C_1 = \rho A \dfrac{dx}{d(kx/A)} = \dfrac{\rho A^2}{k}$

Exemplo

A Figura mostra um sistema hidráulico. Determinar as equações que descrevem como a altura do líquido nos dois recipientes variará com o tempo. Desprezar a energia a cinética.



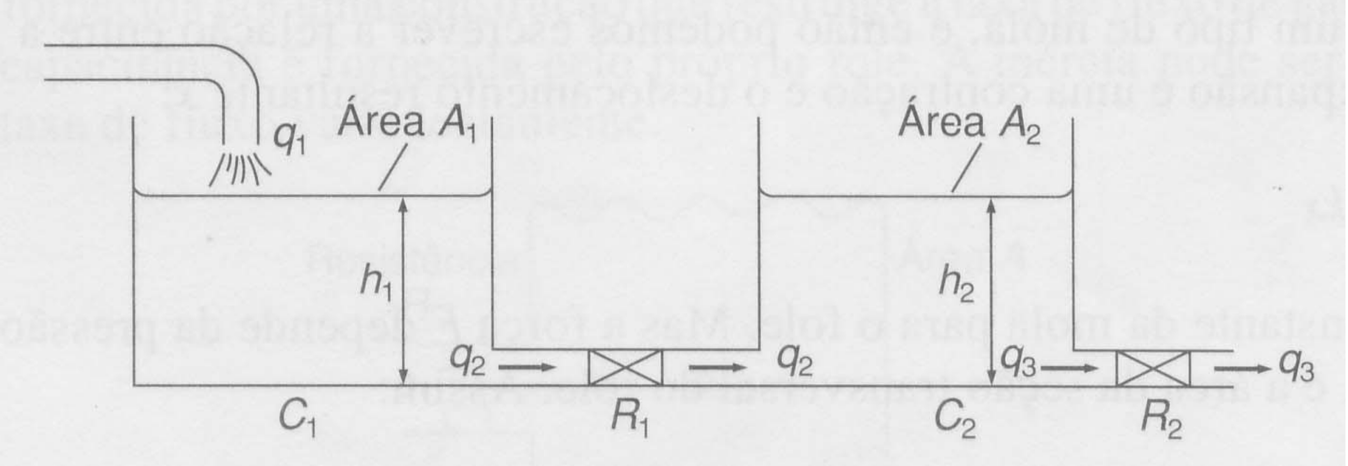
Recipiente 1

$$q_1 - q_2 = C_1 \frac{dp}{dt}$$

$$p = h_1 \rho g$$

$$C_1 = \frac{A_1}{\rho g}$$

$$q_1 - q_2 = A_1 \frac{dh_1}{dt}$$

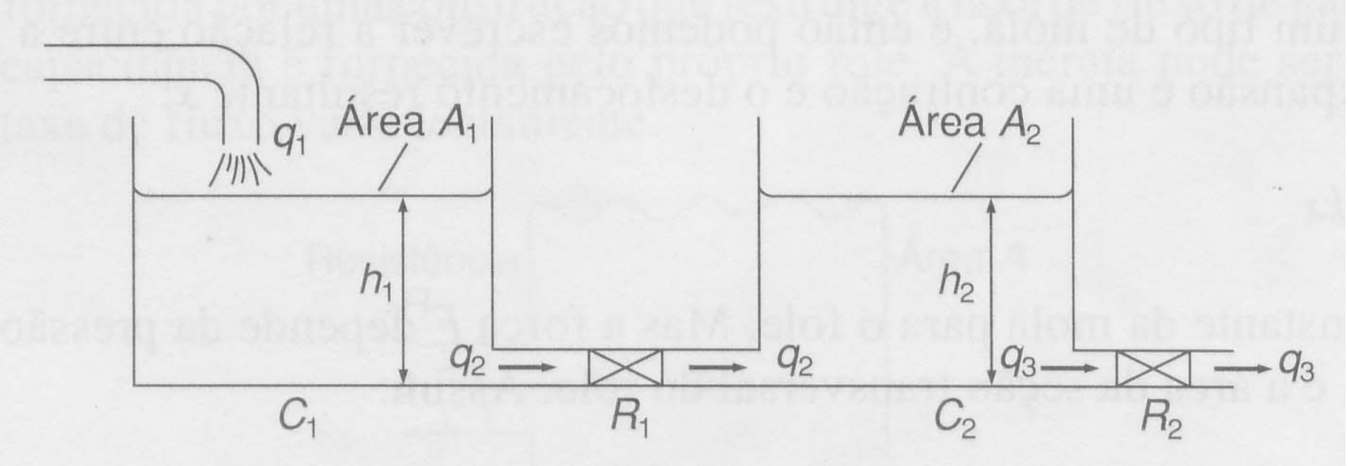


A taxa q_2 na qual o líquido deixa o recipiente é:

$$p = R_1 q_2 \qquad (h_1 - h_2)\rho g = R_1 q_2$$

$$q_1 - \frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt} \qquad \text{(d*)}$$

Essa eq. Descreve como a altura de líquido no recipiente 1 depende da vazão de entrada



Recipiente 2

$$q_2 - q_3 = C_2 \frac{dp}{dt}$$

$$p = h_2 \rho g$$

$$q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$C_2 = \frac{A_2}{\rho g}$$

Para o fluxo q_3

$$p_2 = R_2 q_3$$

$$h_2 \rho g = R_2 q_3$$

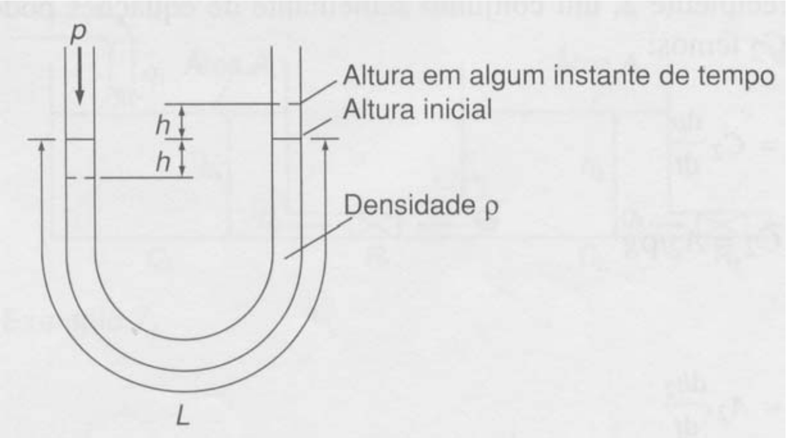
$$q_2 - \frac{h_2 \rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt}$$

$$\frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} - \frac{h_2 \rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \qquad \text{(e*)}$$

Essa eq. Descreve como a altura de líquido no recipiente 2 varia. Assim, as eqs (d*) e (e*) descrevem as variações na altura de líquido nos dois recipientes

Exemplo

A Figura mostra um tubo em U contendo um líquido. Derivar uma expressão que indique como a diferença de altura entre os dois braços varia com o tempo quando a pressão acima do líquido em um dos braços aumenta. Desenhar um diagrama em blocos para o análogo elétrico de um sistema hidráulico



Queda de pressão devido à inércia $= I \dfrac{dq}{dt}$

Queda de pressão devido à resistência $= Rq$

Queda de pressão devido à capacitância $= \dfrac{1}{C} \int q \, dt$

Se p é igual à soma dessas quedas de pressão:

$$p = I\frac{dq}{dt} + Rq + \frac{1}{C}\int q\,dt$$

Volume de líquido deslocado $V = Ah$

$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{d(Ah)}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

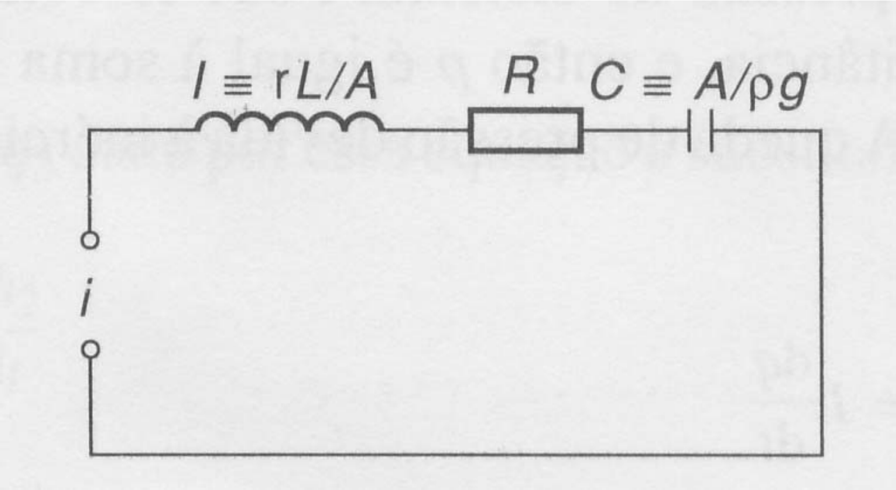
$$p = IA\frac{d^2h}{dt^2} + RA\frac{dh}{dt} + \frac{A}{C}\int dh$$

Se: $\int dh = 2h$ $\quad I = \frac{\rho L}{A}$ $\quad C = \frac{A}{\rho g}$

$$p = \rho L\frac{d^2h}{dt^2} + RA\frac{dh}{dt} + 2h\rho g$$

O sistema tem quedas de pressão devidas à inércia, à resistência e à capacitância somadas

Equivalente elétrico



Exercício para a próxima semana: Exercício 8, página 111, Livro *Engenharia de Controle,* W. Bolton, Makron Books, 1995