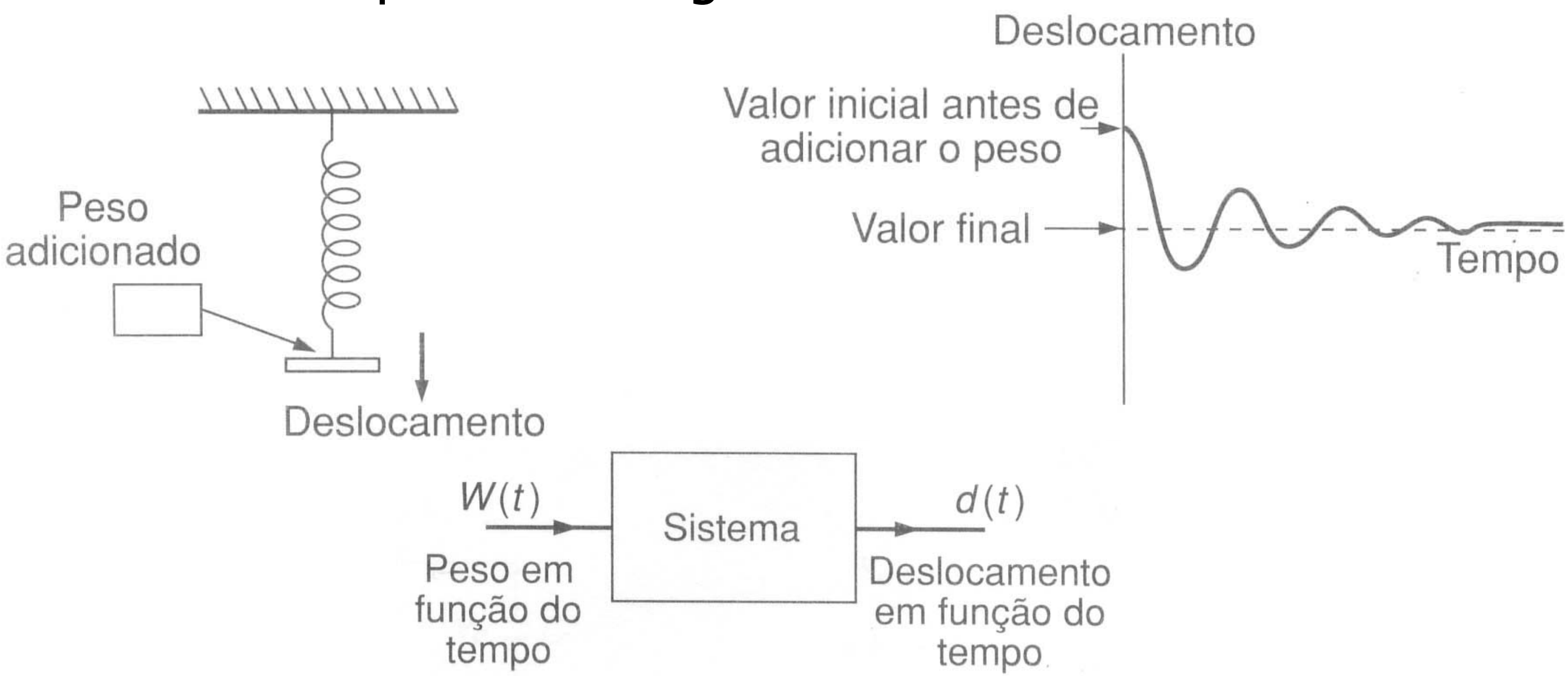
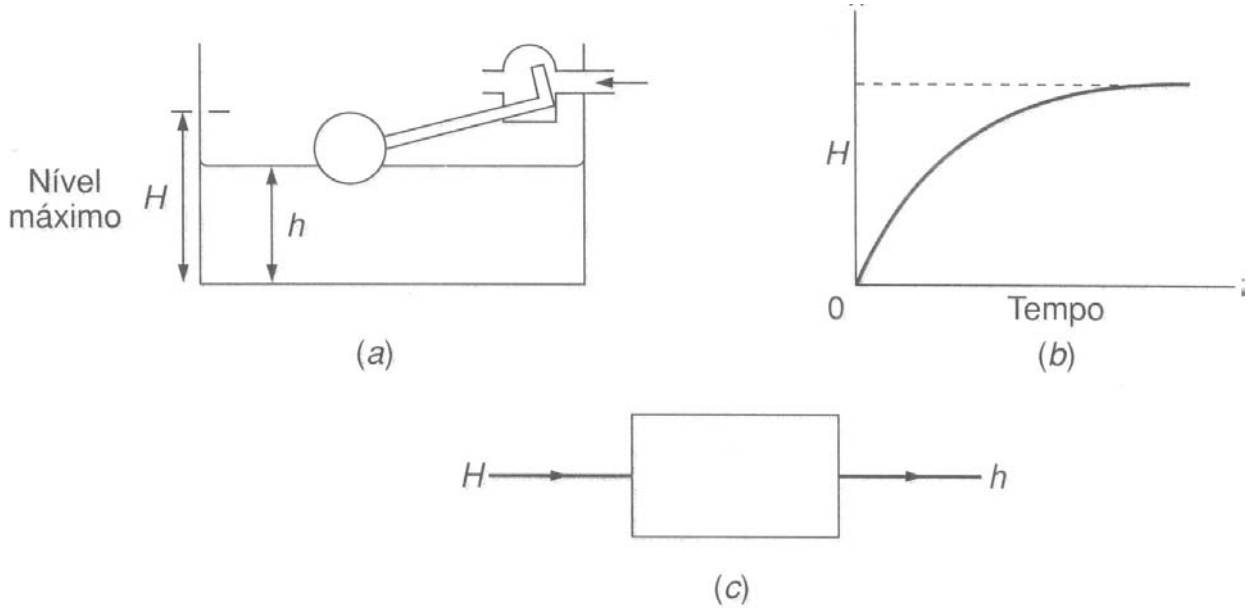
RESPOSTA DO SISTEMA

- Resposta em Regime Transitório
- Resposta em Regime Permanente



Exemplos de sistemas de primeira ordem

Tanque de água controlado por uma bóia

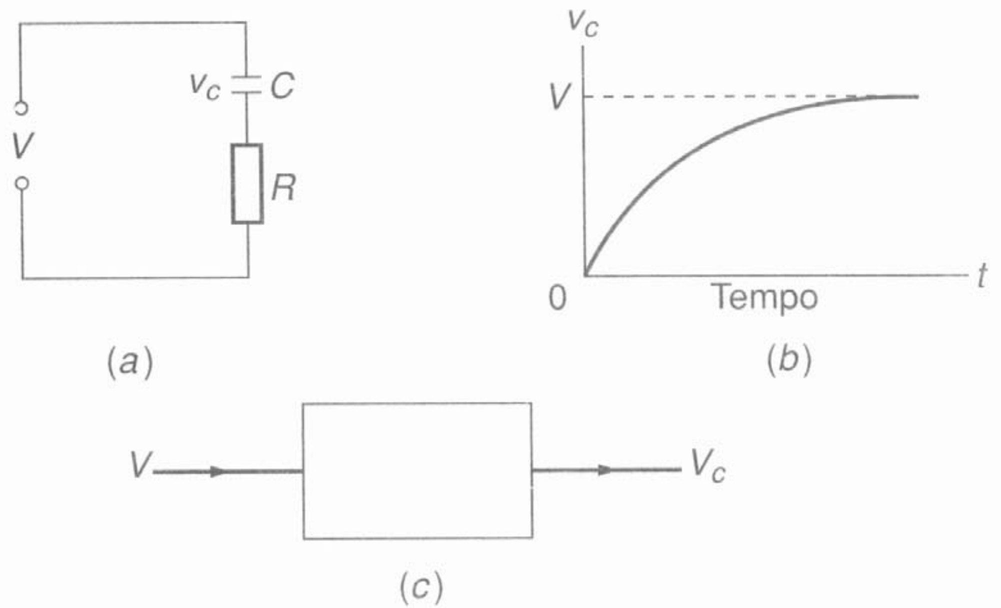


Taxa de variação na altura é proporcional a (H-h)

$$\frac{dh}{dt} = k(H - h)$$

$$h = H(1 - e^{-kt})$$

Sistema *RC*, capacitor em série com resistor



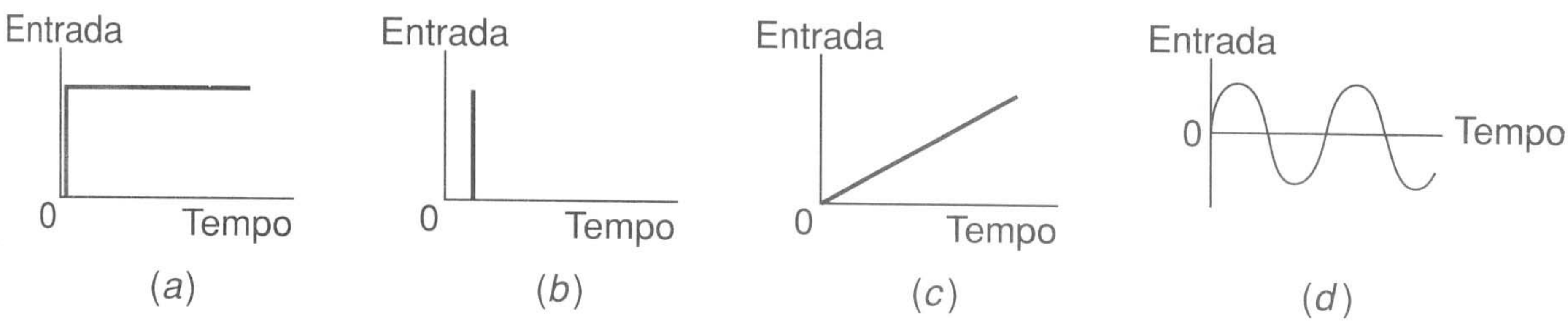
(*a*) Circuito RC série, (*b*) a variação da diferença de potencial no capacitor com o tempo e (*c*) o sistema com sua entrada e saída.

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{RC}(V - V_C) \qquad V_C = V(1 - e^{-t/RC})$$

Equação Diferencial de Primeira Ordem

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

Sinais de entrada = θ_i



Sinais de entrada: (*a*) degrau, (*b*) impulso, (*c*) rampa e (*d*) senoidal.

Resolvendo uma equação diferencial de primeira ordem

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i$$

Substituindo:

$$\theta_o = u + v$$

$$a_1 \frac{d(u+v)}{dt} + a_0 (u+v) = b_0 \theta_i$$

Rearranjando:

$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) + \left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b_0 \theta_i$$

$$\left(a_1\frac{du}{dt}+a_0u\right)+\left(a_1\frac{dv}{dt}+a_0v\right)=b_0\theta_i$$

Fazendo:

$$a_1\frac{dv}{dt}+a_0v=b_0\theta_i$$

Resposta forçada

Temos:

$$a_1\frac{du}{dt}+a_0u=0$$

Resposta transitória ou resposta livre

$$\theta_o = \underbrace{u}_{\text{Resposta transitória}} + \underbrace{v}_{\text{Resposta forçada}}$$

Resposta transitória ou resposta livre

$$a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0$$

$$a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = -\frac{a_0}{a_1} u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{a_0}{a_1} dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{a_0}{a_1} dt$$

$$\ln u = -\frac{a_0}{a_1} t + C_1 \quad \overset{C_1 = \ln A}{\Rightarrow} \quad \ln u = -\frac{a_0}{a_1} t + \ln A$$

$$\ln u - \ln A = -\frac{a_0}{a_1} t \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{u}{A} = -\frac{a_0}{a_1} t$$

Resposta transitória ou resposta livre

$$\ln\frac{u}{A} = -\frac{a_0}{a_1}t \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{A} = e^{-\frac{a_0}{a_1}.t}$$

$$u = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}.t}$$

Resposta transitória (*separando as variáveis e integrando)*

$$u = A\,e^{-\left(\frac{a_0}{a_1}\right)t}$$

Resposta forçada:

Devemos propor uma solução e verificar se satisfaz a E.D.
A solução a ser proposta depende da entrada.

Entrada degrau $\theta_i = k, \quad t > 0$ $\quad v = k$ $\quad K$ = constante

Entrada $\theta_i = a + bt + ct^2 + \ldots$ $\quad v = a + bt + ct^2 + \ldots$

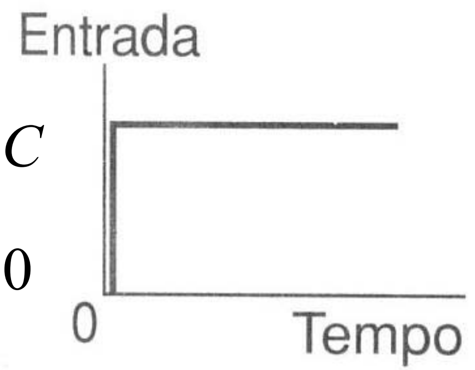
Entrada rampa $\theta_i = bt$ $\quad v = bt$

Entrada $\theta_i = A\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\cos\omega t$ $\quad v = A\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\cos\omega t$

Supondo uma entrada em degrau

$$\theta_i = C$$

$$\theta_i = 0$$



$$\theta_i = 0 \qquad \rightarrow t < 0$$

$$\theta_i = Const. \rightarrow t > 0$$

Propomos como solução

$$v = k \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_0 \theta_i \Rightarrow a_1.0 + a_0.k = b_0 \theta_i$$

$$k = v = \frac{b_0 \theta_i}{a_0}$$

A solução completa é

$$\theta_0 = u + v$$

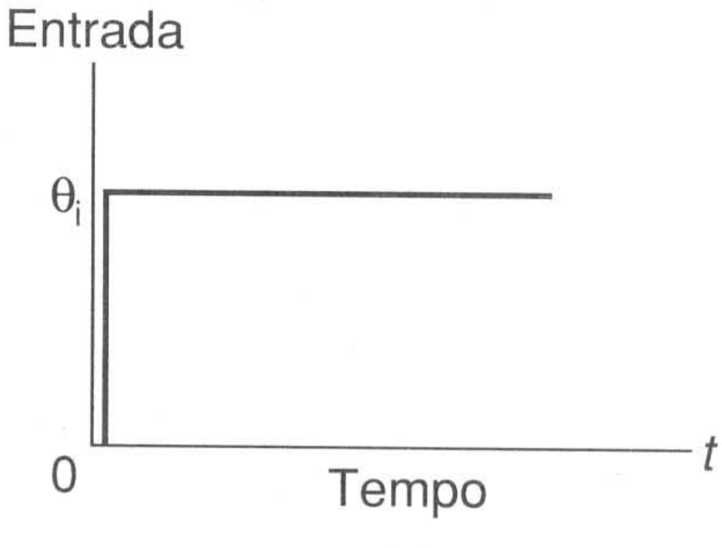
$$\theta_0 = Ae^{\frac{-a_0.t}{a_1}} + \frac{b_0}{a_0}\theta_i$$

Para determinar o valor da constante *A* é necessário uma condição inicial

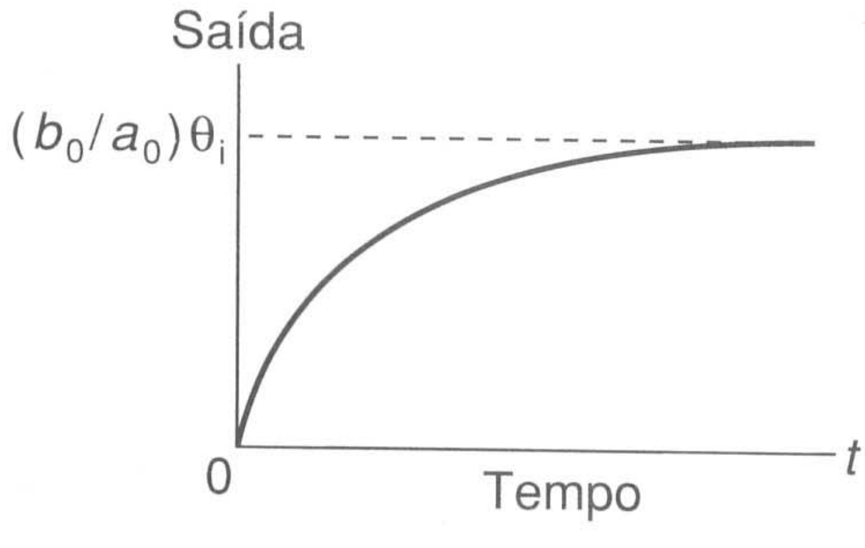
Se $\theta_0 = 0$ em $t = 0$

$$0 = A + \frac{b_0}{a_0}\theta_i \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-b_0}{a_0}\theta_i$$

$$\theta_0 = \frac{-b_0}{a_0}\theta_i e^{\frac{-a_0.t}{a_1}} + \frac{b_0}{a_0}\theta_i \qquad \theta_0 = \frac{b_0}{a_0}\theta_i\left(1 - e^{\frac{-a_0.t}{a_1}}\right)$$



(a)



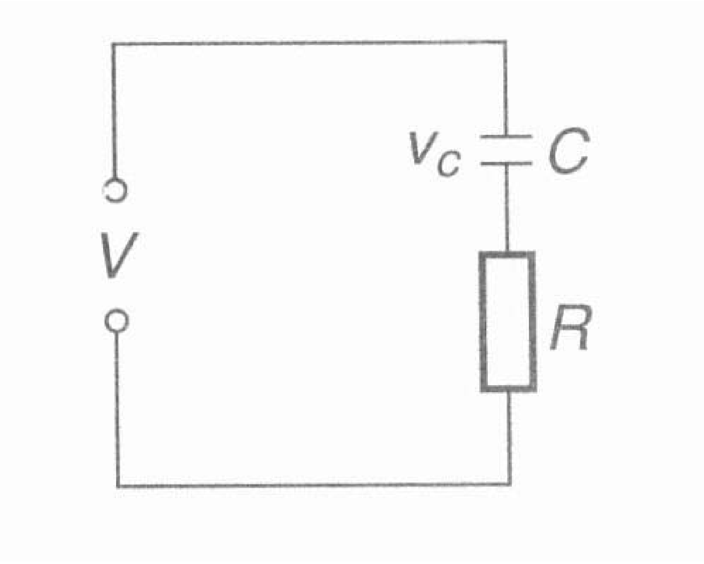
(b)

Entrada

Saída

$$\theta_0 = \frac{b_0}{a_0}\theta_i\left(1 - e^{\frac{-a_0 . t}{a_1}}\right)$$

Exemplo: Um sistema elétrico, uma resistência em série com um capacitor, quando sujeito a uma entrada degrau de amplitude *V*, tem como saída a diferença de potencial no capacitor V_C que é dada pela equação diferencial:



$$RC\frac{dV_C}{dt}+V_C=V$$

Qual é a solução da equação diferencial, isto é, como *Vc* varia com o tempo?

Comparando
$$RC\frac{dV_C}{dt}+V_C=V$$

com
$$a_1\frac{d\theta_o}{dt}+a_0\theta_o=b_0\theta_i$$

então

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a_1=RC & a_0=1 & b_0=1 \\ \theta_o=V_C & & \theta_i=V \end{array}}$$

$$\theta_0=\frac{b_0}{a_0}\theta_i\left(1-e^{\frac{-a_0.t}{a_1}}\right)$$

$$V_C=V\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Equação Diferencial de Segunda Ordem

Uma Eq. Diferencial de segunda ordem tem a forma geral

$$a_2 \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i$$

É normalmente escrita como

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_0\omega_n^2\theta_i$$

Onde ω_n é a freqüência natural angular na qual o sistema oscilará na ausência de qualquer amortecimento e ζ é o *coeficiente de amortecimento*

Resolvendo uma Equação Diferencial de Segunda Ordem

$$\theta_o = \underbrace{u}_{\text{Resposta transitória}} + \underbrace{v}_{\text{Resposta forçada}}$$

Fazendo:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2 v = \omega_n^2 b_0 \theta_i$$

Resposta forçada

Temos:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0$$

Resposta transitória ou resposta livre

Para resolver a equação homogênea podemos tentar uma solução da forma

$$u = A\,e^{st}$$

$$\frac{du}{dt} = As\,e^{st} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = As^2\,e^{st}$$

Substituindo na eq. diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0$$

$$As^2\,e^{st} + 2\zeta\omega_n As\,e^{st} + \omega_n^2 A\,e^{st} = 0$$

$$\boxed{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0}$$

$$u = A\,e^{st}$$

Pode ser solução desde que a equação

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

seja satisfeita

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\left(b^2 - 4ac\right)}}{2a} \qquad s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{\left(4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2\right)}}{2}$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$$

Os valores de s dependem muito do termo que está dentro da raiz.

Quando $\zeta = 0$ o sistema oscila livremente

Quando $\zeta > 1$

existem duas raízes reais diferentes s_1 e s_2

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$$

A solução geral é

$$u = A\, e^{s_1 t} + B\, e^{s_2 t}$$

SISTEMA SUPERAMORTECIDO

Quando $\zeta = 1$

existem duas raízes reais e iguais s_1 e s_2

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

A solução geral é $u = \left(At + B\right) e^{-\omega_n t}$

SISTEMA CRITICAMENTE AMORTECIDO

A solução deveria ser $u = A\, e^{-\omega_n t}$

Mas esta solução, com uma só constante, não satisfaz as condições iniciais para um sistema de segunda ordem

Quando $\zeta < 1$

existem duas raízes complexas s_1 e s_2

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{(-1)\left(1-\zeta^2\right)}$$

$$j = \sqrt{(-1)}$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}$$

Fazendo

$$\omega = \omega_n\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega$$

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega$$

O termo ω é a freqüência angular do movimento quando está na condição especificada por ζ

A solução nestas condições é:

$$u = A\,e^{(-\zeta\omega_n + j\omega)t} + Be^{(-\zeta\omega_n - j\omega)t}$$

$$u = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[A\,e^{(j\omega)t} + B\,e^{(-j\omega)t}\right]$$

Mas

$$e^{(j\omega)t} = \cos\omega t + j\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad e^{-(j\omega)t} = \cos\omega t - j\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$u = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[A\cos\omega t + jA\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\cos\omega t - jB\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

$$u = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[(A+B)\cos\omega t + j(A-B)\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

$$P = A + B \qquad Q = j(A-B)$$

$$u = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[P\cos\omega t + Q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

SISTEMA SUBAMORTECIDO

Para resolver a equação forçada

Supondo entrada em degrau de amplitude θ_i em $t = 0$

$$v = k \qquad \frac{dv}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2 v = \omega_n^2 b_0 \theta_i$$

$$0 + 0 + \omega_n^2 k = \omega_n^2 b_0 \theta_i \qquad v = b_0 \theta_i$$

A resposta completa é a soma de *u* e *v*

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$$

Superamortecido

$$\theta_o = A\,e^{s_1 t} + B\,e^{s_2 t} + b_0\theta_i$$

Criticamente amortecido

$$\theta_o = \left(At + B\right)e^{-\omega_n t} + b_0\theta_i$$

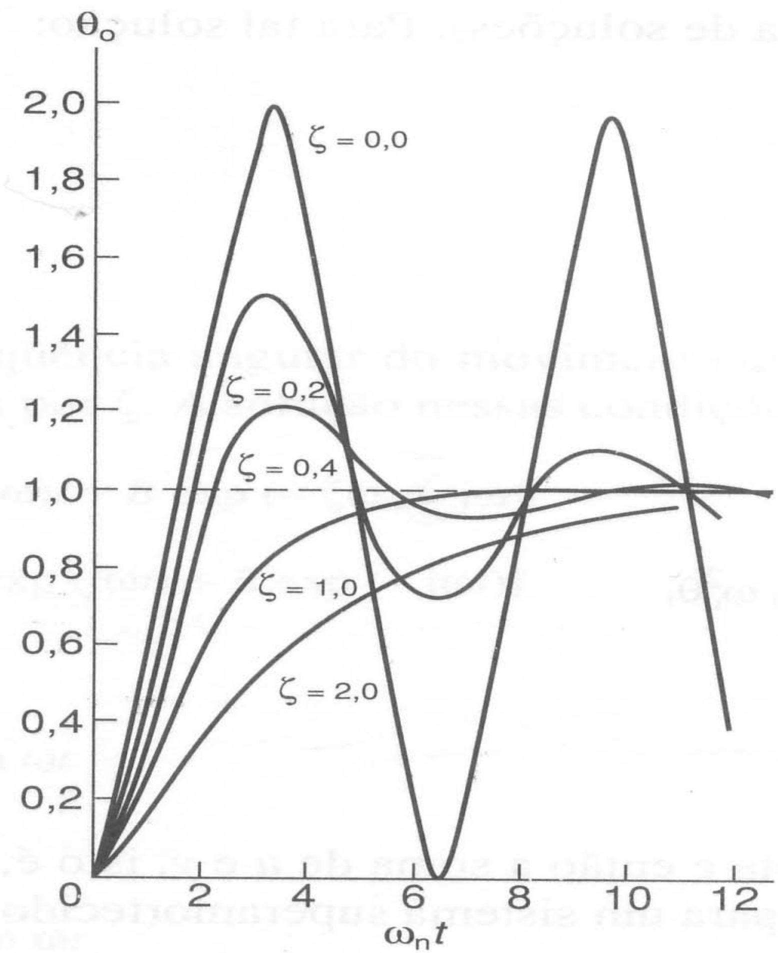
Subamortecido

$$\theta_o = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[P\cos\omega t + Q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right] + b_0\theta_i$$

Quando $t \to \infty$ Todas as soluções conduzem a $\theta_0 = b_0 \theta_i$

Função de transferência em regime permanente

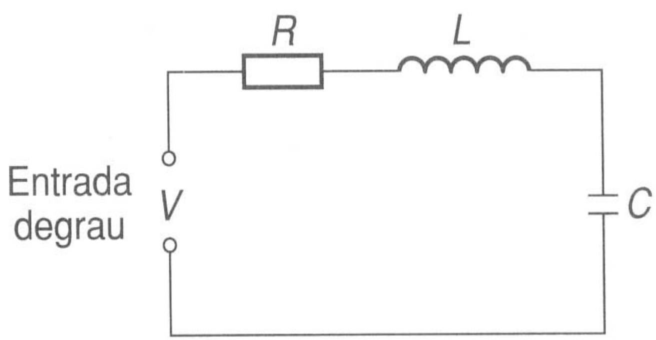
$$G_{SS} = \frac{\theta_o}{\theta_i} = b_0$$



Resposta de um sistema de segunda ordem ao degrau unitário.

Exemplo: Um circuito *RLC*, tem $R=100\Omega$, $L=2H$ e $C=20\mu F$.

A corrente *i* no circuito é dada por $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{V}{LC}$



Para uma entrada degrau *V*

a) Qual é a freqüência natural do sistema?
b) O sistema é superamortecido, criticamente amortecido ou subamortecido?
c) Qual é a freqüência da oscilação amortecida?
d) Qual é a solução da equação diferencial, se em

$$t = 0 \rightarrow i = 0\,,\ \frac{di}{dt} = 0$$

a) Comparando as equações

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_0\omega_n^2\theta_i \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{V}{LC}$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{2\times 20\times 10^{-6}}$$

$$\omega_n = 158 Hz$$

b) Comparando as equações

$$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} = \frac{100}{2}$$

$$\zeta = \frac{50}{2\times 158} = 0{,}16$$

$$\zeta < 1$$

Subamortecido

c) A freqüência de oscilação amortecida é

$$\omega = \omega_n \sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}$$

$$\omega = 158\sqrt{\left(1-0{,}16^2\right)} = 156 Hz$$

d) Sistema subamortecido, a solução é do tipo

$$\theta_o = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[P\cos\omega t + Q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right] + b_0\theta_i$$

$$i = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[P\cos\omega t + Q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right] + V$$

Condições iniciais: $i = 0$ quando $t = 0$

$$0 = 1\left[P + 0\right] + V \qquad P = -V$$

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{quando} \quad t = 0$$

$$\frac{di}{dt} = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[-\omega P\,\mathrm{sen}\,\omega t + \omega Q\cos\omega t\right] - \zeta\omega_n e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[P\cos\omega t + Q\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

$$0 = 1\left[0 + \omega Q\right] - \zeta\omega_n\left[P + 0\right]$$

$$Q = \frac{-\zeta\omega_n}{\omega}V$$

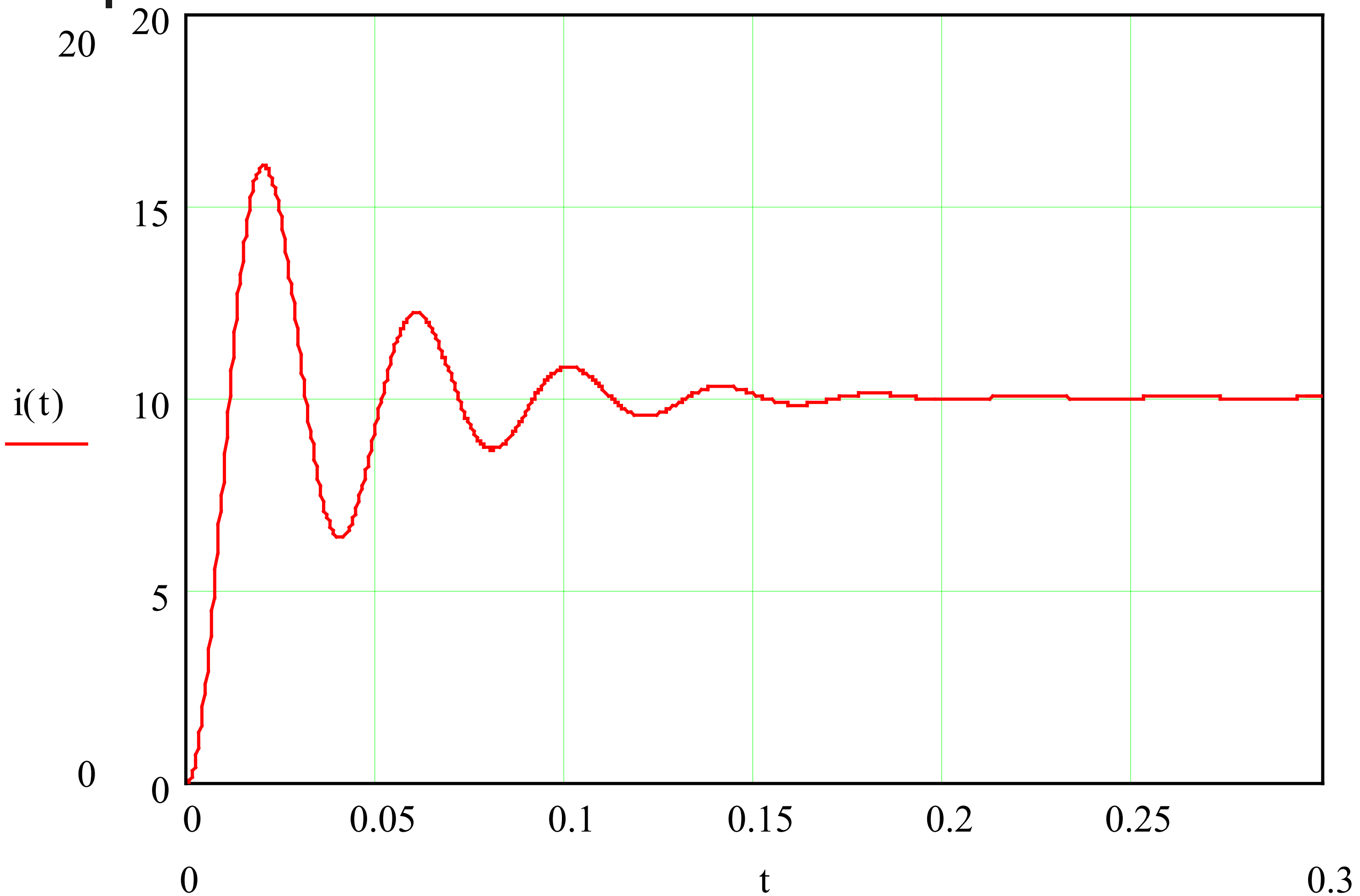
$$i = e^{(-\zeta\omega_n)t}\left[-V\cos\omega t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega}V\,\mathrm{sen}\,\omega t\right] + V$$

$$\omega_n = 158Hz; \quad \zeta = 0{,}16; \quad \omega = 156Hz;$$

$$i = -V\ e^{(-25{,}28)t}\left[\cos 156t + 0{,}162\,\mathrm{sen}\,156t\right] + V$$

$$i = V\left[1 - e^{(-25{,}28)t}\left[\cos 156t + 0{,}162\,\mathrm{sen}\,156t\right]\right]$$

$$i = V\left[1 - e^{(-25,28)t}\left[\cos 156t + 0{,}162\,\mathrm{sen}\,156t\right]\right]$$



Edita gráfico

Mathcad Document